



Lycée Polyvalent Albert Claveille
80, rue Victor Hugo
B.P. 1085
24 001 PERIGUEUX CEDEX

Téléphone: 05.53.02.17.00
Télécopie: 05.53.02.17.40

B.T.S. CONSTRUCTIONS MÉTALLIQUES
Aide Mécanique

SOMMAIRE

Généralités	2		
Les unités du système international et les unités pratiques :	2		
Les différentes conventions pour le repérage des axes :	2		
Notations générales :	2		
Actions :	2		
Sollicitations – Contraintes – Déformations :	3		
Coefficients et grandeurs sans dimensions :	4		
Caractéristiques géométriques :	5		
Caractéristiques des aciers normalisés :	6		
Rappels de R.D.M. :	6		
Aire des sections planes :	6		
Calcul d'une aire :	6		
Aire brute A :	6		
Aire nette A_{net} :	6		
Aire homogénéisée A_H :	6		
Aire de cisaillement (pour les profils I, H) :	6		
Moment statique :	6		
Centre de gravité G :	7		
Moment quadratique (ou d'inertie) de flexion :	7		
Théorème de Huygens (translation d'axes) :	7		
Moments quadratiques des laminés courants I, H :	7		
Moments d'inertie de torsion (limités aux profils I, H) :	7		
Modules de flexion élastique W_{el} :	7		
Modules de flexion plastique W_{pl} :	7		
Facteur de gauchissement :	7		
Rayons de giration :	7		
Méthode de résolution d'un problème de résistance des matériaux	8		
A - Phase: Problème de statique.	8		
B - Phase: Résistance des matériaux.	8		
Relations contraintes-efforts et recherche de déplacements	9		
Relation Contraintes Normales – Efforts :	9		
Relation Contraintes Tangentielles – Efforts :	9		
Relation Moment Fléchissant - Effort tranchant :	9		
Relation déplacement - effort (équation de la ligne élastique) :	9		
Exemples de conditions limites:	9		
Théorèmes énergétiques	10		
Travail d'une force:	10		
Théorème fondamental de l'énergie (Principe des travaux virtuels):	10		
Théorème de la charge unité (ou théorème de Muller-Breslau):	10		
Méthode des forces	11		
Détermination du degré d'hyperstaticité :	11		
Structure isostatique associée :	11		
Principe de superposition :	11		
		Conditions de déplacements (et rotations) :	12
		Calcul des déplacements (et rotations):	12
		Résolution du système:	12
		« Résolution » de la structure:	12
		Méthode des déplacements	15
		Discrétisation et inconnues cinématiques des nœuds:	15
		Efforts de liaisons:	15
		Équilibre des nœuds :	16
		Détermination des inconnues cinématiques:	16
		Résolution de la structure:	16
		INSTABILITÉS	18
		FLAMBEMENT :	18
		Théorie d'Euler: barre bi-articulée soumise à un effort de compression F	18
		Longueur de flambement:	19
		Contrainte critique d'Euler:	19
		Courbes de flambement:	19
		Aspect réglementaire:	20
		Compression simple:	20
		Compression et flexion:	20
		Longueur de flambement:	20
		Structures nœuds fixes :	20
		Structures à nœuds déplaçables :	20
		DÉVERSEMENT :	21
		Aspect expérimental:	21
		Théorie du déversement:	21
		Aspect réglementaire:	22
		VOILEMENT :	23
		Mise en évidence du voilement :	23
		Théorie du voilement:	23
		Aspect réglementaire:	23
		Éléments pour les vérifications	24
		Combinaisons de charges :	24
		Pondérations CM 66 – NV 65/67 (avec carte neige N84) :	24
		Pondérations É.L.U. CM 66 + Additif 80 – NV 65/67 partie vent – N 84 :	24
		Valeurs limites des déformations :	25
		Verticalement :	25
		Horizontalement :	25
		Effets dynamiques :	25
		Organigrammes :	26
		Annexe 1: FLAMBEMENT:	34
		Flambement Additif 80:	34
		Annexe 2: DÉVERSEMENT:	35
		Déversement Additif 80:	35

GÉNÉRALITÉS

Les unités du système international et les unités pratiques :

Grandeurs à mesurer	Unités pratiques	Unités S.I.	Équivalence
Efforts	daN kN	N	1 daN = 10 N 1 kN = 10 ³ N
Moments fléchissants	m.daN m.kN	m.N	1 m.daN = 10 m.N 1 m.kN = 10 ³ m.N
Contraintes	daN/mm ² N/mm ²	N/m ² = Pa	1 daN/mm ² = 10 ⁷ Pa 1 N/mm ² = 1 MPa
Charges surfaciques ou densités de charges	daN/m ² kN/m ²	N/m ² = Pa	1 daN/m ² = 10 Pa 1 kN/m ² = 10 ³ Pa
Modules de flexion élastique W_{el}	cm ³	m ³	1 cm ³ = 10 ⁻⁶ m ³
Modules de flexion plastique W_{pl}	cm ³	m ³	1 cm ³ = 10 ⁻⁶ m ³
Moments statiques	cm ³	m ³	1 cm ³ = 10 ⁻⁶ m ³
Moments quadratiques (d'inertie) I	cm ⁴	m ⁴	1 cm ⁴ = 10 ⁻⁸ m ⁴
Sections A	mm ² cm ²	m ²	1 mm ² = 10 ⁻⁶ m ² 1 cm ² = 10 ⁻⁴ m ²
Longueurs	mm	m	1 mm = 10 ⁻³ m
Flèches	mm cm	m	1 mm = 10 ⁻³ m 1 cm = 10 ⁻² m

Les décaNewtons sont souvent assimilés aux kilogrammes : 1 daN \approx 1kg. L'accélération de la pesanteur g est proche de 10 m/s² (en fait $g = 9,81$ m/s², approximation tout à fait réaliste au vu des précisions des calculs).

Les différentes conventions pour le repérage des axes :

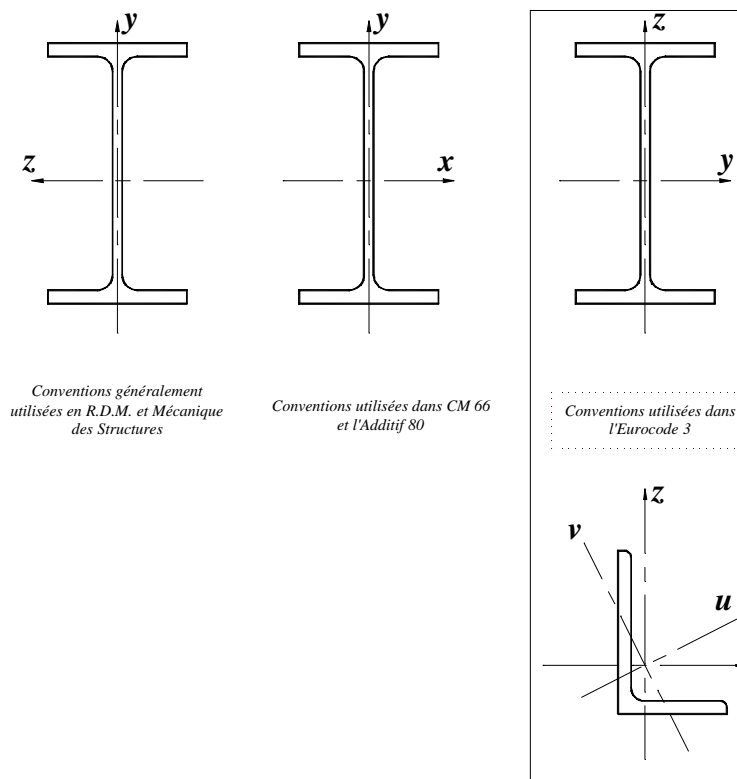
Suivant l'évolution des règlements, les conventions pour les repérages des axes sont différentes.

En R.D.M. et Mécanique des structures, le matériau n'est pas forcément de l'acier et les

habitudes peuvent être différentes (compression positive pour le béton, traction positive pour l'acier).

Le CM 66 et l'additif 80 utilise xx pour l'axe de « forte inertie » et yy pour la « faible inertie ».

Avec l'Eurocode 3, les nouvelles conventions donnent yy pour la « forte inertie » et zz pour



la « faible inertie ». On préférera cette dernière convention.

Notations générales :

Actions :

A	Charge accidentelle (explosion, choc de véhicules...)	daN
F	Charge ponctuelle en général	daN
G	Charge d'exploitation ponctuelle	daN
Q	Charge d'exploitation ponctuelle	daN

S_n	Charge de neige normale	daN/m ²
S_e	Charge de neige extrême	daN/m ²
S_r	Charge de neige réduite	daN/m ²
S_0	Charge de neige au sol suivant N84	daN/m ²
S_a	Charge de neige accidentelle suivant N84	daN/m ²
S_I, S_{II}, S_{III}	Charges de neige suivant N84	daN/m ²
W_n	Charge de vent normale	daN/m ²
W_e	Charge de vent extrême	daN/m ²
q_h	Pression dynamique normale hauteur h (NV 65/67)	daN/m ²
p	Charge uniformément répartie, en général	daN/m ou daN/m ²
g	Charge permanente uniformément répartie	daN/m ou daN/m ²
q	Charge d'exploitation uniformément répartie	daN/m ou daN/mm ²

Sollicitations – Contraintes – Déformations :

E	Module d'élasticité longitudinale de l'acier ($E = 210\ 000\ \text{MPa} = 21\ 000\ \text{daN/mm}^2$)	MPa, daN/mm ²
ν (nu)	Coefficient de Poisson (pour l'acier, $\nu = 0,3$)	Sans unité
G	Module d'élasticité transversale de l'acier $\left[G = \frac{E}{2(1+\nu)} \right]$ ($G = 81\ 000\ \text{MPa} = 8\ 100\ \text{daN/mm}^2$)	MPa, daN/mm ²
F_p ou P_v	Effort de précontrainte dans un boulon	daN
M	Moment sollicitant, en général	m.daN
M_m	Moment sollicitant maximum (Additif 80)	m.daN
M_{cr}	Moment critique élastique de déversement	m.daN
M_{eff}	Moment efficace (section de classe 4)	m.daN
M_{el} ou M_e	Moment élastique	m.daN
M_N	Moment résistant plastique réduit du fait de l'effort axial	m.daN
M_{pl} ou M_p	Moment plastique	m.daN
M_R	Moment résistant	m.daN

M_u	Moment ultime	m.daN
N	Effort normal, en général	daN
N_R	Effort normal résistant	daN
N_K	Effort normal critique d'Euler	daN
N_{pl} ou N_p	Effort normal de plastification	daN
N_u	Effort normal ultime	daN
V	Effort tranchant sollicitant	daN
V_{pl} ou V_p	Effort tranchant de plastification	daN
V_u	Effort tranchant ultime	daN
f ou δ	Flèche d'une poutre	mm, cm
f_u ou σ_R	Contrainte de rupture d'une pièce	MPa, daN/mm ²
f_{ub}	Contrainte de rupture d'un boulon	MPa, daN/mm ²
f_y ou σ_e	Contrainte limite d'élasticité d'un acier	MPa, daN/mm ²
$f_{réd}$	Contrainte limite d'élasticité réduite pour l'aire de cisaillement : $f_{réd} = (1 - r)f_y$	MPa, daN/mm ²
ϵ (epsilon)	Allongement relatif (déformation)	%
ϵ_y ou ϵ_e	Déformation correspondant à la contrainte limite d'élasticité f_y $\left[\epsilon_e = \epsilon_y = \frac{S_e}{E} \right]$	%
σ	Contrainte normale	MPa, daN/mm ²
σ_K	Contrainte critique d'Euler $\left[\sigma_K = \frac{p^2 E}{I^2} \right]$	MPa, daN/mm ²
σ_D	Contrainte critique de déversement	MPa, daN/mm ²
σ_{eb}	Contrainte limite d'élasticité garantie de l'acier des boulons précontraints	MPa, daN/mm ²
$\sigma_{réd}$	Contrainte limite d'élasticité garantie de l'acier des boulons non précontraints (valeur réduite)	MPa, daN/mm ²
τ (tau)	Contrainte tangentielle ou de cisaillement	MPa, daN/mm ²
τ_{cr}	Résistance critique élastique au voilement par cisaillement	MPa, daN/mm ²
τ_e	Contrainte limite de cisaillement pur en élasticité $\left[\tau_e = \frac{f_y}{\sqrt{3}} \right]$ dans le cas du critère de Von Mises	MPa, daN/mm ²

$\tau_{//}$	Contrainte de cisaillement parallèle à l'axe d'un cordon de soudure	MPa, daN/mm ²
τ_{\perp}	Contrainte de cisaillement perpendiculaire à la section de gorge d'un cordon de soudure	MPa, daN/mm ²
Δ ou δ (delta)	Déplacement horizontal en tête de poteau	mm, cm
T	Période d'oscillations (NV 65/67)	s

Coefficients et grandeurs sans dimensions :

B	Coefficient caractéristique du niveau d'application des charges (déversement selon CM 66)	Sans unité
C	Coefficient caractéristique de la répartition longitudinale des charges (déversement selon CM 66)	Sans unité
C, C _e et C _i	Coefficients de pression : C = C _e - C _i (e : extérieur et i : intérieur)	Sans unité
D	Coefficient caractéristique des dimensions de la pièce (déversement selon CM 66)	Sans unité
K	Coefficient d'encastrement ou de rigidité poteau/poutre	Sans unité
a	$a = \frac{A_w}{A}$ rapport de la section de l'âme d'une poutre à la section totale	Sans unité
k	Coefficient de flambement (selon CM 66)	Sans unité
k	Coefficient minorateur (soudures)	Sans unité
k ₀	Coefficient de flambement (selon Additif 80)	Sans unité
k ₁	Coefficient d'amplification des contraintes de compression (selon CM 66)	Sans unité
k _d	Coefficient de déversement (selon CM 66)	Sans unité
k _D	Coefficient de déversement (selon Additif 80)	Sans unité
k _f	Coefficient d'amplification des contraintes de flexion (selon CM 66)	Sans unité
k _m , k _{m'}	Coefficient de flambement des tronçons de membrures de pièces treillis (selon CM 66)	Sans unité
k _s	Coefficient de dimension des trous de perçage pour boulons	Sans unité
k _y et k _z	Coefficients de flambement-flexion	Sans unité

k _τ	Coefficient de voilement par cisaillement	Sans unité
m	Nombre de plans de cisaillement ou de frottement	Sans unité
n	$n = \frac{N}{N_{pl}}$ ou nombre de boulons	Sans unité
n	Coefficient d'équivalence entre 2 matériaux $n = \frac{E_1}{E_2}$	Sans unité
δ (delta)	Coefficient d'influence des déformations d'effort tranchant dans le flambement des pièces composées (selon CM 66)	Sans unité
β _M (beta)	Facteur de moment uniforme équivalent (flambement)	Sans unité
β _w	Facteur de corrélation (soudures)	Sans unité
ε (epsilon)	Coefficient de réduction élastique de l'acier $\left[e = \sqrt{\frac{235}{f_y}} \right]$	Sans unité
η (eta)	Facteur de distribution de rigidités (flambement)	Sans unité
λ (lambda)	Élancement $\left[I = \frac{l_K}{i} \right]$	Sans unité
λ _K	Élancement Eulerien $\left[I_K = p \cdot \sqrt{\frac{E}{S_e}} \right]$	Sans unité
$\bar{\lambda}$	Élancement réduit $\left[\bar{I} = \frac{I}{I_K} \right]$	Sans unité
$\bar{\lambda}_{LT}$	Élancement de déversement	Sans unité
λ _w	Élancement de l'âme d'une poutre $\left[I_w = \sqrt{\frac{f_y}{\sqrt{3} \cdot t_{cr}}} \right]$	Sans unité
λ'	Élancement fictif, compte tenu des déformations d'effort tranchant	Sans unité
λ ₀	Élancement fictif d'une membrure comprimée de pièces treillis (déversement selon CM 66)	Sans unité
λ _m , λ _{m'}	Élancement des tronçons de membrures d'une pièce treillis (selon CM 66)	Sans unité
λ _a , λ _b	Rapports de dimensions (NV 65/67)	Sans unité
μ (mu)	Coefficient d'éloignement de l'état critique (selon CM 66)	Sans unité

μ	<i>Coefficient de frottement entre deux pièces en contact</i>	Sans unité
ρ (rho)	<i>Rendement d'une section</i>	Sans unité
χ (chi)	<i>Coefficient de réduction de flambement</i>	Sans unité
χ_{LT}	<i>Coefficient de réduction de déversement</i>	Sans unité
ψ (psi)	<i>Coefficient de distribution de contraintes ou coefficient de combinaison (Eurocode 3)</i>	Sans unité
γ (gamma)	<i>Coefficient partiel de sécurité</i>	Sans unité
Indice s_d	<i>Sollicitation de calcul</i>	Selon
Indice R_d	<i>Résistance de calcul</i>	Selon

Caractéristiques géométriques :

A	<i>Section brute d'une pièce</i>	cm ²
A_{eff}	<i>Section efficace d'une pièce (classe 4)</i>	cm ²
A_n	<i>Section nette d'une pièce</i>	cm ²
A_f	<i>Section d'une semelle de poutre en double T</i>	cm ²
A_v	<i>Aire de cisaillement</i>	cm ²
A_w	<i>Section de l'âme d'une pièce</i>	cm ²
A_s	<i>Section résistante de la tige d'un boulon en fond de filet</i>	cm ²
I_t ou J	<i>Moment d'inertie de torsion</i>	cm ⁴
I_w	<i>Facteur de gauchissement d'une section</i>	cm ⁴
I_y	<i>Moment d'inertie de flexion maximal</i>	cm ⁴
I_z	<i>Moment d'inertie de flexion minimal</i>	cm ⁴
W_{eff}	<i>Module de résistance efficace</i>	cm ³
$W_{el} (= \frac{I}{v})$	<i>Module de résistance élastique</i>	cm ³
W_{pl} ou Z	<i>Module de résistance plastique</i>	cm ³
S ou μ (mu)	<i>Moment statique</i>	cm ³
a	<i>Épaisseur utile (ou gorge) d'un cordon de soudure</i>	mm, cm
b	<i>Largeur d'une semelle de poutre</i>	mm, cm

c	<i>Portée en console d'une semelle de poutre</i>	mm, cm
d	<i>Diamètre nominal des tiges des boulons ou hauteur de la partie droite d'une âme</i>	mm, cm
d_0 ou d_{tr}	<i>Diamètre de perçage des trous de boulonnage</i>	mm, cm
g	<i>Largeur du champ diagonal de traction (voilement)</i>	mm, cm
h	<i>Hauteur d'une pièce en général</i>	mm, cm
h_0 ou h^*	<i>Distance entre axes neutres des semelles d'une poutre</i>	mm, cm
i	<i>Rayon de giration d'une section $\left[i = \sqrt{\frac{I}{A}} \right]$</i>	mm, cm
ℓ	<i>Longueur en général ou portée d'une poutre</i>	mm, cm, m
ℓ_D	<i>Longueur de déversement d'une poutre</i>	mm, cm, m
ℓ_k	<i>Longueur de flambement d'une poutre</i>	mm, cm, m
ℓ_0	<i>Longueur nominale d'une poutre</i>	mm, cm, m
r	<i>Rigidité d'une barre $\left[r = \frac{I}{\ell} \right]$</i>	cm ³
t	<i>Épaisseur d'une pièce ou d'une tôle</i>	mm, cm
t_f ou e_s	<i>Épaisseur d'une semelle de poutre</i>	mm, cm
t_w ou e_a	<i>Épaisseur d'une âme de poutre</i>	mm, cm
v_s ou v'	<i>Distance de la fibre extrême supérieure à l'axe neutre d'une section</i>	mm, cm
v_i ou v	<i>Distance de la fibre inférieure à l'axe neutre d'une section</i>	mm, cm
α (alpha)	<i>Angle en général</i>	degré [°], radian [rad]
β (beta)	<i>Angle de toiture dans N84</i>	degré [°], radian [rad]
θ (thêta)	<i>Angle en général</i>	degré [°], radian [rad]
ϕ (phi)	<i>Rotation</i>	degré [°], radian [rad]

Caractéristiques des aciers normalisés :

Les aciers de construction sont réglementés par la norme EN 10-025 qui définit les nuances d'acier. Elle définit également, pour une nuance donnée, des classes de qualité (JR, JO, J2, G3) qui se distinguent notamment par leur soudabilité. Cette norme concerne les aciers non alliés, laminés à chaud et destinés à la fabrication d'éléments de construction, soudés ou non, et qu'il s'agisse de produits plats aussi bien que de produits longs.

En construction, nous nous limitons à 3 nuances principales d'acier ; S235 dans la majorité des cas, S275 et S355 plus rarement utilisés, par exemple dans les ouvrages d'art.

Le calcul en plasticité peut être utilisé dans l'analyse globale des structures ou de leurs éléments à la condition que l'acier satisfasse aux 3 exigences suivantes :

- la contrainte à la rupture en traction f_u doit être supérieure de 20% au moins à la limite d'élasticité f_y : $f_u \geq 1,2.f_y$
- l'allongement à la rupture e_u (correspondant à f_u) doit être supérieur à 15% : $e_u \geq 0,15$
- l'allongement à la rupture e_u doit être supérieur à 20 fois l'allongement e_y (correspondant à f_y) : $e_u \leq 20e_y$

Les 3 nuances d'acier figurant dans le tableau suivant satisfont à ces 3 exigences.

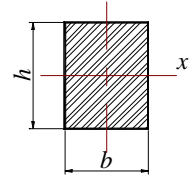
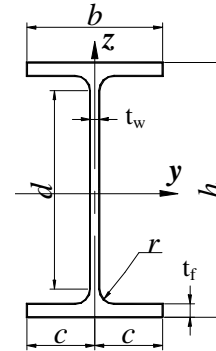
Caractéristiques mécaniques des aciers en fonction de leur épaisseur t	Nuances d'aciers		
	S.235	S.275	S.355
Contrainte limite élastique f_y (MPa)			
t ≤ 16 mm	235	275	355
16 < t ≤ 40 mm	225	265	345
40 < t ≤ 63 mm	215	255	335
Contrainte de rupture en traction f_u (MPa)			
t ≤ 3 mm	360/510	430/580	510/680
3 < t ≤ 100 mm	340/470	410/560	490/630
Allongement minimal moyen ϵ			
t ≤ 3 mm	18%	15%	15%
3 < t ≤ 150 mm	23%	19%	19%

Rappels de R.D.M. :

Aire des sections planes :

Calcul d'une aire :

Pour un rectangle en coordonnées cartésiennes $A = b.h$



Pour un profil I, H

$$A = ht_w + 2(b - t_w)t_f + 4r^2\left(1 - \frac{p}{4}\right)$$

Aire brute A :

L'aire brute est obtenue en prenant les dimensions nominales de la section sans déductions.

Aire nette A_{net} :

L'aire nette est égale à l'aire brute diminuée des aires des trous.

$$A_n = e \left[b - n d_{tr} + S \left(\frac{\ell_i^2}{4 t_i} \right) \right]_{min}$$

Aire homogénéisée A_H :

L'aire homogénéisée d'une section hétérogène, constituée de 2 matériaux différents, est obtenue en utilisant un coefficient d'équivalence n égal au rapport des modules d'élasticité longitudinal E des matériaux constitutifs. En construction mixte (acier + béton) :

$$A_H = B + n.A \quad \text{avec } n = \frac{E_A}{E_B} \quad (A : \text{acier et } B : \text{béton})$$

Aire de cisaillement (pour les profils I, H):

$$A_{v,z} = A - 2bt_f + (t_w + 2r)t_f \quad A_{v,y} = 2bt_f + (t_w + r)t_w$$

Moment statique :

Le moment statique m d'une aire plane A par rapport à un axe X situé dans son plan est égal au produit de cette aire par la distance algébrique du centre de cette aire à l'axe X :

$$m = A.d = bh.d \quad \text{pour un rectangle}$$

Remarque : Le moment statique est noté S dans l'additif 80.

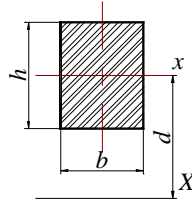
Centre de gravité G :

Le calcul du moment statique permet de déterminer la position du centre de gravité d'une section, puis de connaître la position de l'axe neutre.

$$y_G = \frac{m}{A} = \frac{\sum A_i \cdot d_i}{\sum A_i}$$

Moment quadratique (ou d'inertie) de flexion :

$$I_x = \frac{bh^3}{12} \text{ pour une aire rectangulaire}$$



Théorème de Huygens (translation d'axes) :

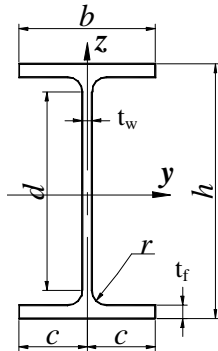
Le moment quadratique étant généralement calculé par rapport aux axes principaux de la surface, il est nécessaire de « transporter » ce moment par rapport à un axe distant :

$$I_X = I_x + A \cdot d^2$$

Moments quadratiques des laminés courants I, H :

$$I_y = \frac{h^3 t_w}{12} + \frac{(b - t_w) t_f (h - t_f)^2}{2} + \frac{t_f^3 (b - t_w)}{6} + r^2 (4 - \pi) \left[\frac{h}{2} - t_f - r \left(1 - \frac{2}{12 - 3\pi} \right) \right]^2 + 4r^4 \left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{16} - \frac{1}{9(4 - \pi)} \right)$$

$$I_z = \frac{h t_w^3}{12} + \frac{(b - t_w) t_f (b + t_w)^2}{8} + \frac{t_f (b - t_w)^3}{24} + r^2 (4 - \pi) \left[\frac{t_w}{2} + r \left(1 - \frac{2}{12 - 3\pi} \right) \right]^2 + 4r^4 \left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{16} - \frac{1}{9(4 - \pi)} \right)$$



Moments d'inertie de torsion (limités aux profils I, H) :

$$I_t = \frac{2bt_f^3}{3} \left[1 - 0,63 \frac{t_f}{b} \left(1 - \frac{t_f^4}{12b^4} \right) \right] + \frac{(h - 2t_f)t_w^3}{3} + 2 \left(0,1 \frac{r}{t_f} + 0,15 \right) t_f \left[\frac{(t_f + r)^2 + t_w \left(r + \frac{t_w}{4} \right)}{2r + t_f} \right]^4$$

Modules de flexion élastique W_{el} :

$$W_{el,y} = \frac{I_y}{v} \text{ et } W_{el,z} = \frac{I_z}{v} \text{ avec } v \text{ distance de l'axe neutre à la fibre extérieure.}$$

Pour les profils I, H : $v = \frac{h}{2}$ sur y et $v = \frac{b}{2}$ sur z

Modules de flexion plastique W_{pl} :

Le module de flexion plastique est la somme des moments statiques (de part et d'autre de l'axe) :

$$W_{pl} = m_1 + m_2$$

$$A_1 = A_2$$

$$m_1 = A_1 \cdot d_1$$

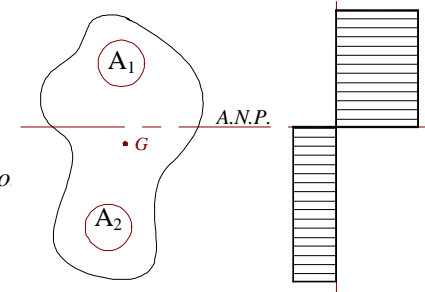
$$m_2 = A_2 \cdot d_2$$

d_1 : distance entre centre de gravité de A_1 et l'axe.

d_2 : distance entre centre de gravité de A_2 et l'axe.

En particulier, pour les profils symétriques, $m_1 = m_2$ et do

$$W_{pl} = 2 \cdot m (= 2 \cdot S \text{ cf. Additif 80})$$



Pour les profilés laminés courants :

$$W_{pl,y} = 2 \cdot m_y = \frac{t_w h^2}{4} + (b - t_w)(h - t_f)t_f + \frac{4 - p}{2} r^2 (h - 2t_f) + \frac{3p - 10}{3} r^3$$

$$W_{pl,z} = \frac{b^2 t_f}{2} + \frac{(h - 2t_f)}{4} t_w^2 + r^3 \left(\frac{10}{3} - p \right) + \left(2 - \frac{p}{2} \right) t_w r^2$$

Facteur de gauchissement :

$$I_w = \frac{t_f b^3}{24} (h - t_f)^2$$

Rayons de giration :

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

et

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$$

MÉTHODE DE RÉOLUTION D'UN PROBLÈME DE RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

Il faut d'abord résoudre le problème de statique afin de connaître toutes les forces extérieures appliquées au corps: forces de masse, forces de contact (appliquées et réactions d'appuis) puis y ajouter les opérations propres à la Résistance des Matériaux, ce qui donne le résumé ci-dessous :

A - Phase: Problème de statique.

1. Condenser l'énoncé: tableau des données et des inconnues.
2. Préciser les hypothèses simplificatrices éventuelles (poids négligé, application des forces, etc...).
3. Schématiser le corps ou l'ensemble étudié.
4. Isoler l'élément étudié, c'est-à-dire délimiter la «frontière» qui le sépare de tout ce qui l'entoure pour faire apparaître les contacts avec l'extérieur et les forces de contact qui en résultent.
5. Énumérer les forces extérieures appliquées au système isolé et préciser les éléments connus de chacune d'elles (point d'application, droite d'action, sens, intensité).
 - a) Forces à distance (ou de masse): poids, forces magnétiques, forces électriques.
 - b) Forces de contact: forces appliquées connues, actions (ou réactions) de contact inconnues (ce qui nécessite de préciser la nature des appuis).
6. Exprimer, à l'aide des équations d'équilibre, ou graphiquement que le corps est en équilibre sous l'action de toutes les forces extérieures, ce qui donne des relations entre forces connues et forces inconnues.
7. Comparer, dans la solution par les équations d'équilibre, le nombre d'inconnues (I) au nombre d'équations (E):
 - a) si $I=E$, le problème est isostatique (déterminé par les seules équations d'équilibre) et résoluble.
 - b) si $I<E$, la structure est un mécanisme. Le problème est à revoir de plus près: hypothèses réalistes ?, deux équations identiques ?, erreurs, genre d'appuis mal définis ?, etc...
 - c) si $I>E$, le problème est hyperstatique. La différence $I-E$ est le degré d'hyperstaticité. Il est égal au nombre d'équations manquantes. Il faut rechercher celles-ci en faisant appel aux équations de déformation ou autre méthode de résolution de problèmes hyperstatiques.
8. Résoudre le système d'équations, ce qui donne les réactions d'appuis (forces et moments).
9. Vérifier que les résultats satisfont les données.

B - Phase: Résistance des matériaux.

10. Considérer une section fictive (S) normale à la ligne moyenne du corps, définie par son abscisse rectiligne x ou curviligne s , et faire la réduction au centre de gravité G de cette section du torseur de toutes les forces extérieures appliquées à l'élément, situées d'un même côté de la section (S). Ce qui définit le torseur des forces intérieures et en conséquence: l'effort normal \vec{N} , l'effort tranchant \vec{V} , le moment fléchissant \vec{M}_f , le moment de torsion \vec{M}_t . En faisant varier x (ou s) on obtient et on peut construire les graphes: N_x , V_x , M_f , M_t .
11. Choisir en fonction de l'expérience, le matériau qui convient, ainsi que le coefficient de sécurité et les différents coefficients correcteurs éventuels (de forme, de surface...) si la pièce est dessinée en détail. Pour certaines constructions, des règlements officiels imposent les coefficients de sécurité.
12. Appliquer les formules de base de la résistance des matériaux pour définir les contraintes (si les sections sont fixées, ou bien les sections si les contraintes sont imposées) aux endroits les plus remarquables, et notamment les plus dangereux.
13. Éventuellement, calculer ou établir graphiquement les déformations.
14. Faire l'application numérique en vérifiant que les contraintes limites ne sont pas dépassées, faute de quoi il faudra modifier les sections ou changer le matériau primitivement adopté.

Remarque : Au cours des calculs littéraux, il est conseillé de faire des contrôles d'homogénéité afin de déceler le plus tôt possible des erreurs éventuelles.

RELATIONS CONTRAINTES-EFFORTS ET RECHERCHE DE DÉPLACEMENTS

Relation Contraintes Normales – Efforts :

On suppose que la section d'une poutre est soumise à un effort normal et un moment fléchissant :

$$s = \frac{N}{A} - \frac{M_f}{I} \cdot y$$

avec axe (Gy) vertical vers le haut.

Relation Contraintes Tangentielles – Efforts :

On suppose que la section de la poutre est soumise à un effort tranchant :

$$t = \frac{V \cdot S(y)}{I \cdot b}$$

avec S le moment statique de la section et b la largeur de la section.

Relation Moment Fléchissant - Effort tranchant :

Relation Moment fléchissant - Effort tranchant :

$$V(x) = - \frac{dM(x)}{dx}$$

Relation déplacement - effort (équation de la ligne élastique) :

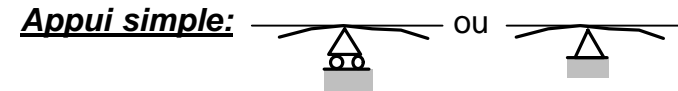
Cette équation est valable dans l'hypothèse de petites déformations dues principalement au moment fléchissant dans une barre.

Dans un repère (O,x,y), elle s'écrit :

$$y''(x) = \frac{M_f}{EI} \quad y(x) = \iint \frac{M_f}{EI} dx$$

En intégrant cette équation intervient des constantes d'intégration (2 constantes par expression de moment fléchissant) qu'il faut déterminer à partir des conditions limites (sur appuis ou pour des rotations nulles et identiques)(les rotations correspondent à la dérivée $y'(x)$).

Exemples de conditions limites:

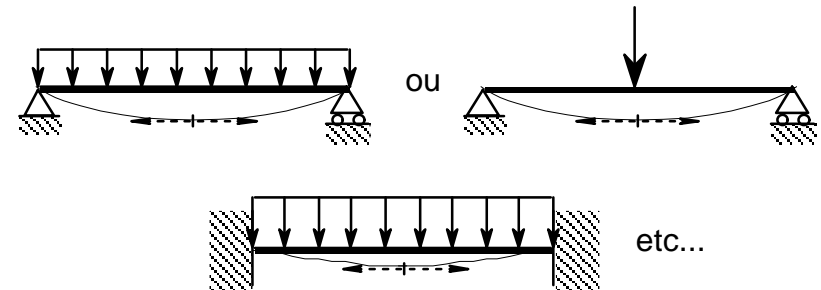


$$\begin{cases} \text{Flèche} = 0 \\ \text{et} \\ \text{rotation équation de droite} = \text{rotation équation de gauche} \end{cases}$$

Encastrement:



$$\begin{cases} \text{Flèche} = 0 \\ \text{et} \\ \text{Rotation} = 0 \end{cases}$$



Rotation = 0 en milieu de travée pour ces 3 exemples.

THÉORÈMES ÉNERGÉTIQUES

Travail d'une force:

Le travail d'une force F (potentiel interne) dans une structure s'écrit, en fonction du déplacement D sous F :

$$W = \frac{1}{2} \cdot F \cdot D$$

Remarque: Pour un moment C appliqué à la structure, $W = \frac{1}{2} \cdot C \cdot W$
avec W rotation au point d'application du moment C .

Théorème fondamental de l'énergie (Principe des travaux virtuels):

Le théorème fondamental de l'énergie est exprimé sous la forme du principe des travaux virtuels appliqué aux structures.
La somme des travaux des efforts extérieurs appliqués au système est égale à l'énergie de déformation de ce système :

$$W_{ext} = W_{def}$$

Le travail des efforts extérieurs: $W_{ext} = \frac{1}{2} \cdot F \times \text{déplacement sous } F$

L'énergie de déformation: $W_{def} = \int_{structure} \left(\frac{N^2}{2EA} + \frac{V^2}{2GA} + \frac{M^2}{2EI} + \frac{M_t^2}{2GK} \right) dx$

Théorème de la charge unité (ou théorème de Muller-Breslau):

À partir des méthodes énergétiques (lemme de Maxwell-Betti et théorème de Castigliano), on peut déterminer en 1 point d'une structure la valeur de la flèche (ou de la rotation). Cette méthode ne permet pas d'obtenir l'équation de la déformée sur toute une barre comme le permet l'équation de la ligne élastique.

Le déplacement D_i (déplacement dans le sens de F_i dû à l'ensemble des forces appliquées à la structure) a pour expression:

$$D_i = \int_{structure} \left(\frac{N \overline{N}_i}{EA} + \frac{V \overline{V}_i}{GA} + \frac{M \overline{M}_i}{EI} \right) dx$$

avec \overline{N}_i , \overline{V}_i , \overline{M}_i respectivement effort normal, effort tranchant et moment fléchissant dus à $F_i = 1$ (le moment de torsion n'a pas été repris ici).

Ces différentes intégrales sont appelées intégrales de Mohr.

Principe:

Sur une structure isostatique, il suffit d'introduire une charge unitaire (effort = 1) au point où on recherche la flèche.

Ce qui nous donne la même structure (point de vue géométrique) mais avec un chargement unitaire (effort = 1).

Soit la structure étudiée et son chargement, le système (S_0) qui produit un moment fléchissant M_0 .

Soit la structure avec une force unitaire, le système (S_1) qui produit un moment fléchissant M_1 .

En négligeant les déformations dues à l'effort normal et à l'effort tranchant, le **déplacement**, appelé D , au point où s'applique la force 1 et dans le sens de la force 1, a pour valeur:

$$D = \int \frac{M_0 \cdot \overline{M}_1}{EI} dx \quad \overline{M}_1 : \text{moment dû à une charge unité.}$$

Remarques:

à Le calcul des rotations s'effectue de la même façon en introduisant un couple unitaire (Couple = 1) à l'endroit où on désire connaître la rotation.

Au lieu de D , on aura W en calculant l'intégrale précédente du produit des moments M_0 et M_1 divisé par EI .

à Dans le cas général on néglige les déformations dues à l'effort normal et à l'effort tranchant. Si ce n'est pas possible, il suffit de rajouter dans le calcul des déplacements ou des rotations les intégrales concernant l'effort normal et l'effort tranchant (voir cours sur les méthodes énergétiques pour détails).

à Pour une structure treillis, les barres ne sont soumises qu'à un effort normal (compression ou traction). Donc pour le calcul des déplacements on ne prendra en compte que les déformations dues à l'effort normal. La méthode reste identique; effort unitaire au nœud où on désire connaître le déplacement.

Le déplacement vaut alors:

$$D = \sum_{i=1}^n \frac{N_{0i} \cdot \overline{N}_{1i}}{E \cdot A_i} \cdot \ell_i \quad \overline{N}_{1i} : \text{effort normal dans une barre } i \text{ dû à une charge unité.}$$

Détermination du degré d'hyperstaticité :

$$D^{\circ} = - \{ 3 \cdot b - (3 \cdot l_3 + 2 \cdot l_2 + 1 \cdot l_1) \}$$

l_1 : liaisons appuis simples.

l_2 : liaisons articulations.

l_3 : liaisons encastremets.

Si: $d^{\circ} > 0$: système hyperstatique.

$d^{\circ} = 0$: système isostatique.

$d^{\circ} < 0$: système hypostatique (mécanisme).

Indiquer les repères locaux sur les barres (surtout pour les structures à plusieurs barres).

Cas d'une structure hyperstatique ($d^{\circ} > 0$):

Structure isostatique associée :

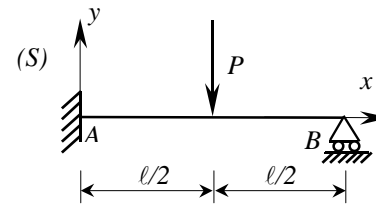
Recherche d'une structure isostatique associée faisant apparaître le chargement sur la structure initiale et les inconnues hyperstatiques (autant d'inconnues que la valeur du degré hyperstatique).

Principe de superposition :

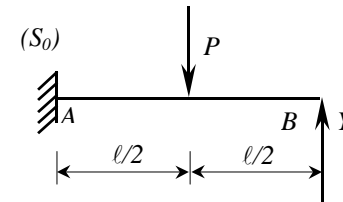
On applique le principe de superposition sur la structure isostatique associée (S_0) en décomposant suivant les différents chargements (les inconnues hyperstatiques étant des chargements).

Dans l'exemple: $(S_0) = (S_1) + (S_2)$

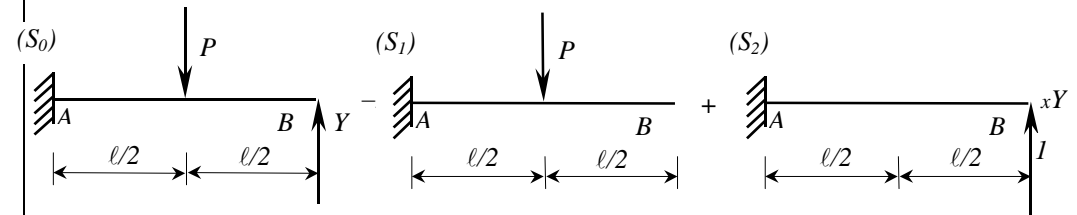
Exemple d'une structure hyperstatique de degré 1 :



1 liaison encastrement : 3 inconnues.
 1 liaison appui simple : 1 inconnue.
 1 barre : 3 équations.
 $D^{\circ} = 1 \times 3 + 0 \times 2 + 1 \times 1 - 3 \times 1 = 1$
 La structure est hyperstatique de degré 1



$D_{\text{vertical en B}} = 0$ pour retrouver l'appui simple en B.



Conditions de déplacements (et rotations) :

On exprime les conditions de déplacements (et rotations) pour que la structure isostatique associée soit identique à la structure initiale (S).

Ce déplacement est ensuite exprimée à partir des structures de la décomposition par le principe de superposition.

Calcul des déplacements (et rotations):

Le calcul des déplacements (et des rotations) D_{ij} et d_{ij} passe par l'étude des différentes structures de la décomposition par le principe de superposition.

Le plus souvent, on néglige les travaux de déformations dues au travail de l'effort normal et au travail de l'effort tranchant devant le travail du moment fléchissant (cas courant où cette hypothèse n'est pas faite; barre bi-articulée).

En appliquant le théorème de la charge unité, on calcule chaque déplacement (et rotation).

Relation générale du théorème de la charge unité:

$$D_{ij} = \int \frac{M_i \overline{M}_j}{EI} dx \quad \overline{M}_j : \text{moment dû à une charge unité.}$$

Résolution du système:

La résolution du système peut se faire par substitution ou par combinaison linéaire entre les équations du système. Avant de commencer la résolution, effectuer toutes les simplifications possibles pour limiter les calculs.

« Résolution » de la structure:

Connaissant les inconnues hyperstatiques, il suffit d'écrire les équations d'équilibre de la structure initiale afin de déterminer toutes les réactions et moments éventuels sur appuis.

Le but étant de déterminer le torseur des efforts internes dans toute la structure (N, V et M_f pour une ossature plane) pour dimensionner ou vérifier les différentes sections.

Dans l'exemple: Déplacement vertical en B nul.

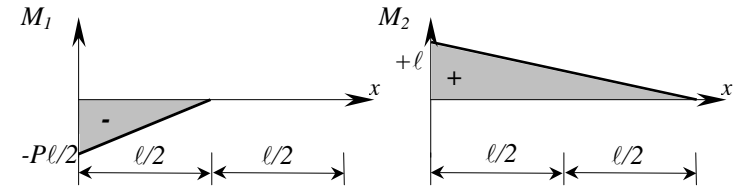
$$D_B = 0$$

Déplacem^t en B = déplacem^t sens effort I du à P + déplacem^t sens effort I du à Y.

$$D_B = 0 = D_{12} + d_{22} \cdot Y$$

Dans l'exemple, on néglige les déformations dues au travail de l'effort tranchant devant les déformations dues au travail du moment fléchissant.

On obtient pour les diagrammes des moments fléchissants:



Pour gagner du temps, on peut utiliser le tableau des Intégrales de Mohr qui donne des résultats simples pour les intégrales de moments qui reviennent fréquemment dans les structures.

$$D_{12} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{l}{2} \left(\frac{-Pl}{2} \right) \left(\frac{l}{2} + 2l \right) = -\frac{5Pl^3}{48EI} \quad \text{et} \quad d_{22} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot l \cdot l \cdot l = \frac{l^3}{3EI}$$

Dans l'exemple le système d'équations se résume à une seule équation :

$$D_B = 0 = D_{12} + d_{22} \cdot Y$$

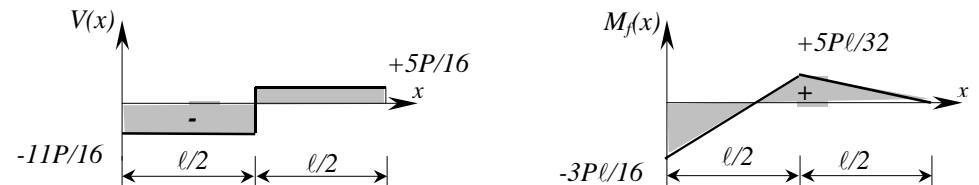
$$D'ou Y = -\frac{D_{12}}{d_{22}} = -\frac{-5Pl^3}{48EI} \cdot \frac{3EI}{l^3} = +\frac{5P}{16}$$

Dans l'exemple, l'inconnue hyperstatique Y est déterminée.

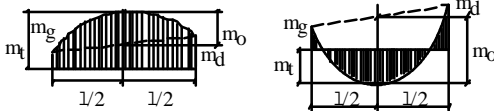

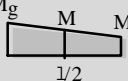
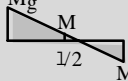


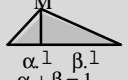
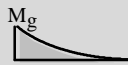
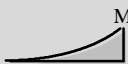

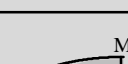
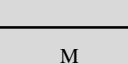
Les réactions et moment d'appui en A ont pour valeurs:

$$X_A = 0, \quad Y_A = P - \frac{5P}{16} = \frac{11P}{16}, \quad M_A = +P \cdot \frac{l}{2} - \frac{5P}{16} \cdot l = +\frac{3Pl}{16}$$

D'où les diagrammes d'effort tranchant et de moment fléchissant:

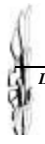


INTÉGRALES DE MOHR											
résultat x $1/EI$						$\alpha \cdot 1 \quad \beta \cdot 1$ $\alpha + \beta = 1$					
	$M \cdot m$	$1/2 M \cdot (m_g + m_d)$	$1/2 M \cdot (m_g + m_d)$	$1/2 M \cdot m_g$	$1/2 M \cdot m_d$	$1/2 M \cdot m$	$1/3 M \cdot m_g$	$1/3 M \cdot m_d$	$2/3 M \cdot m_g$	$2/3 M \cdot m_d$	$2/3 M \cdot m$
	$1/2 m \cdot (M_g + M_d)$	$1/6 (2M_g \cdot m_g + M_g \cdot m_d + M_d \cdot m_g + 2M_d \cdot m_d)$	$1/6 (2M_g \cdot m_g + M_g \cdot m_d + M_d \cdot m_g + 2M_d \cdot m_d)$	$1/6 m_g \cdot (2M_g + M_d)$	$1/6 m_d \cdot (M_g + 2M_d)$	$1/6 m \cdot [M_g(1 + \beta) + M_d(1 + \alpha)]$	$1/12 m_g \cdot (3M_g + M_d)$	$1/12 m_d \cdot (3M_d + M_g)$	$1/12 m_g \cdot (5M_g + 3M_d)$	$1/12 m_d \cdot (3M_g + 5M_d)$	$1/3 m \cdot (M_g + M_d)$
	$1/2 m \cdot (M_g + M_d)$	$1/6 (2M_g \cdot m_g + M_g \cdot m_d + M_d \cdot m_g + 2M_d \cdot m_d)$	$1/6 (2M_g \cdot m_g + M_g \cdot m_d + M_d \cdot m_g + 2M_d \cdot m_d)$	$1/6 m_g \cdot (2M_g + M_d)$	$1/6 m_d \cdot (M_g + 2M_d)$	$1/6 m \cdot [M_g(1 + \beta) + M_d(1 + \alpha)]$	$1/12 m_g \cdot (3M_g + M_d)$	$1/12 m_d \cdot (3M_d + M_g)$	$1/12 m_g \cdot (5M_g + 3M_d)$	$1/12 m_d \cdot (3M_g + 5M_d)$	$1/3 m \cdot (M_g + M_d)$
	$1/2 M_g \cdot m$	$1/6 M_g(2m_g + m_d)$	$1/6 M_g(2m_g + m_d)$	$1/3 M_g \cdot m_g$	$1/6 M_g \cdot m_d$	$1/6 M_g \cdot m \cdot (1 + \beta)$	$1/4 M_g \cdot m_g$	$1/12 M_g \cdot m_d$	$5/12 M_g \cdot m_g$	$1/4 M_g \cdot m_d$	$1/3 M_g \cdot m$
	$1/2 M_d \cdot m$	$1/6 M_d(m_g + 2m_d)$	$1/6 M_d(m_g + 2m_d)$	$1/6 M_d \cdot m_g$	$1/3 M_d \cdot m_d$	$1/6 M_d \cdot m \cdot (1 + \alpha)$	$1/12 M_d \cdot m_g$	$1/4 M_d \cdot m_d$	$1/4 M_d \cdot m_g$	$5/12 M_d \cdot m_d$	$1/3 M_d \cdot m$
	$1/2 M \cdot m$	$1/6 M \cdot [m_g(1 + \beta) + m_d(1 + \alpha)]$	$1/6 M \cdot [m_g(1 + \beta) + m_d(1 + \alpha)]$	$1/6 M \cdot m_g \cdot (1 + \beta)$	$1/6 M \cdot m_d \cdot (1 + \alpha)$	$1/3 M \cdot m$	$1/12 M \cdot m_g \cdot (1 + \beta + \beta^2)$	$1/12 M \cdot m_d \cdot (1 + \alpha + \alpha^2)$	$1/12 M \cdot m_g \cdot (5 - \alpha - \alpha^2)$	$1/12 M \cdot m_d \cdot (5 - \beta - \beta^2)$	$1/3 M \cdot m \cdot (1 + \alpha\beta)$
	$1/3 M_g \cdot m$	$1/12 M_g(3m_g + m_d)$	$1/12 M_g(3m_g + m_d)$	$1/4 M_g \cdot m_g$	$1/12 M_g \cdot m_d$	$1/12 M_g \cdot m \cdot (1 + \beta + \beta^2)$	$1/5 M_g \cdot m_g$	$1/30 M_g \cdot m_d$	$3/10 M_g \cdot m_g$	$2/15 M_g \cdot m_d$	$1/5 M_g \cdot m$
	$1/3 M_d \cdot m$	$1/12 M_d(m_g + 3m_d)$	$1/12 M_d(m_g + 3m_d)$	$1/12 M_d \cdot m_g$	$1/4 M_d \cdot m_d$	$1/12 M_d \cdot m \cdot (1 + \alpha + \alpha^2)$	$1/30 M_d \cdot m_g$	$1/5 M_d \cdot m_d$	$2/15 M_d \cdot m_g$	$3/10 M_d \cdot m_d$	$1/5 M_d \cdot m$
	$2/3 M_g \cdot m$	$1/12 M_g(5m_g + 3m_d)$	$1/12 M_g(5m_g + 3m_d)$	$5/12 M_g \cdot m_g$	$1/4 M_g \cdot m_d$	$1/12 M_g \cdot m \cdot (5 - \alpha - \alpha^2)$	$3/10 M_g \cdot m_g$	$2/15 M_g \cdot m_d$	$8/15 M_g \cdot m_g$	$11/30 M_g \cdot m_d$	$7/15 M_g \cdot m$
	$2/3 M_d \cdot m$	$1/12 M_d(3m_g + 5m_d)$	$1/12 M_d(3m_g + 5m_d)$	$1/4 M_d \cdot m_g$	$5/12 M_d \cdot m_d$	$1/12 M_d \cdot m \cdot (5 - \beta - \beta^2)$	$2/15 M_d \cdot m_g$	$3/10 M_d \cdot m_d$	$11/30 M_d \cdot m_g$	$8/15 M_d \cdot m_d$	$7/15 M_d \cdot m$
	$2/3 M \cdot m$	$1/3 M(m_g + m_d)$	$1/3 M(m_g + m_d)$	$1/3 M \cdot m_g$	$1/3 M \cdot m_d$	$1/3 M \cdot m \cdot (1 + \alpha\beta)$	$1/5 M \cdot m_g$	$1/5 M \cdot m_d$	$7/15 M \cdot m_g$	$7/15 M \cdot m_d$	$8/15 M \cdot m$

INTÉGRALES DE MOHR <small>résultat x 1/EI</small>	$\frac{1}{l} \int M^2 \cdot dx$	
	M^2	$1/6 M(m_g + 4m_t + m_d)$
	$1/3 (M_g^2 + M_g M_d + M_d^2)$	$1/6 (M_g m_g + 4M m_t + M_d m_d)$
	$1/3 (M_g^2 + M_g M_d + M_d^2)$	$1/6 (M_g m_g + 4M m_t + M_d m_d)$
	$1/3 M_g^2$	$1/6 M_g(m_g + 2m_t)$
	$1/3 M_d^2$	$1/6 M_d(2m_t + m_d)$
	$1/3 M^2$	$1/6 M[-2m_o(1+\alpha^2) + (4m_o - m_g + m_d)(1+\alpha) + 3m_g]$
	$1/5 M_g^2$	$1/60 M_g[5(3m_g + m_d) + 12m_o]$
	$1/5 M_d^2$	$1/60 M_d[5(m_g + 3m_d) + 12m_o]$
	$8/15 M_g^2$	$1/60 M_g[5(5m_g + 3m_d) + 28m_o]$ ou $1/60 M_g(11m_g + m_d + 28m_t)$
	$8/15 M_d^2$	$1/60 M_d[5(3m_g + 5m_d) + 28m_o]$ ou $1/60 M_d(m_g + 11m_d + 28m_t)$
	$8/15 M^2$	$1/15 M [5(m_g + m_d) + 8m_o]$

Attention: le sommet ne se trouve pas forcément au milieu

$$m_t = m_o + \frac{m_d + m_g}{2}$$



MÉTHODE DES DÉPLACEMENTS

Discrétisation et inconnues cinématiques des nœuds:

La structure doit être décomposée en nœuds et en barres.

Chaque nœud comporte des degrés de liberté (ou variables cinématiques) qu'il faut indiquer pour chaque nœud.

Pour une ossature plane, il y a 3 degrés de liberté par nœud: $\begin{cases} u: \text{déplacement horizontal} \\ v: \text{déplacement vertical} \\ \mathbf{W}: \text{rotation du nœud} \end{cases}$

Au niveau des appuis, des valeurs peuvent être nulles:

Appui simple: $v = 0$. (appui roulant).

Articulation: $u = 0$ et $v = 0$ (valable pour un appui simple bloqué en translation).

Encastrement: $u = 0$, $v = 0$ et $\mathbf{W} = 0$.

Des degrés de liberté peuvent être liés entre eux suivant la géométrie et le chargement de la structure.

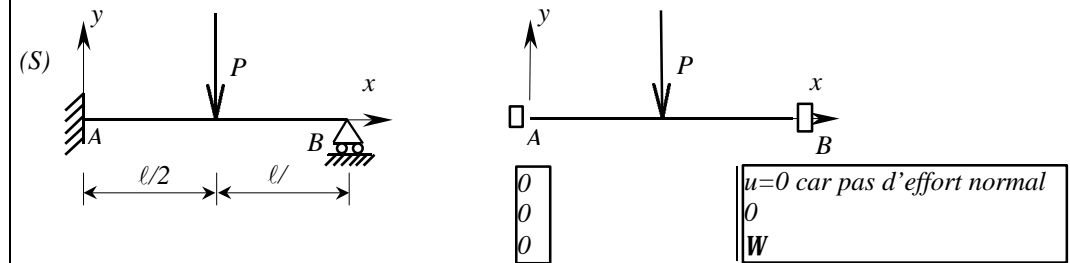
Le nombre total de degrés de liberté inconnus et indépendants indique le nombre d'équations que comportera le système.

Donc, il est important de ne pas négliger cette phase qui conditionne tout le reste et peut éviter des calculs inutiles.

Efforts de liaisons:

Les efforts de liaisons N_{ij} , N_{ji} , V_{ij} , V_{ji} , M_{ij} , M_{ji} sont déterminés à partir des équations établies pour une barre non chargée auxquelles il faut rajouter les N^0 , V^0 et M^0 aux appuis produits par le chargement pour la barre bi-encastree.

Exemple d'une structure hyperstatique de degré 1 :



Dans l'exemple, on obtient:

$$V_{AB} = \frac{EI}{\ell^2} (0 + 6\mathbf{W} + 0) + \frac{P}{2} \quad \text{et} \quad M_{AB} = \frac{EI}{\ell} (0 + 2\mathbf{W} + 0) + P\frac{\ell}{8}$$

$$V_{BA} = -\frac{EI}{\ell^2} (0 + 6\mathbf{W} + 0) + \frac{P}{2} \quad \text{et} \quad M_{BA} = \frac{EI}{\ell} (0 + 4\mathbf{W} + 0) - P\frac{\ell}{8}$$

Équilibre des nœuds :

L'équilibre des différents nœuds permet de liasonner les équations des barres.

Détermination des inconnues cinématiques:

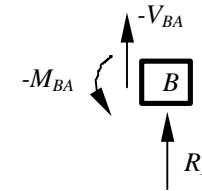
A partir de l'équilibre des nœuds, on établit un système d'équations comportant autant d'inconnues cinématiques (degrés de libertés inconnus) que d'équations.

Ce système se résout par substitution ou par combinaison linéaire entre les équations.

Résolution de la structure:

Les inconnues cinématiques (ou degrés de liberté) étant déterminées, il ne reste plus qu'à déterminer les efforts à chaque extrémité des barres pour tracer les diagrammes de N , V , et M_f .

Dans l'exemple, l'équilibre du nœud B donne :



$$R_B = V_{BA} \text{ et } M_{BA} = 0$$

Dans l'exemple:

$$M_{AB} = 0 = \frac{EI}{\ell} (4W) - P\frac{\ell}{8} \quad \text{donc} \quad W = + \frac{P\ell^2}{32 EI}$$

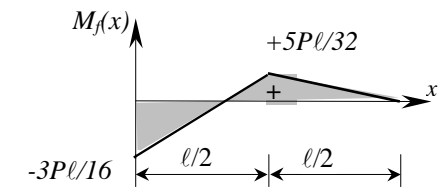
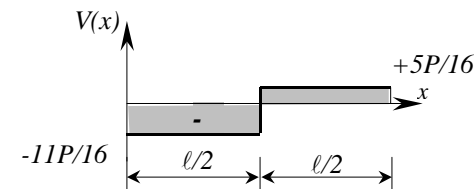
Dans l'exemple:

$$R_B = V_{BA} = -\frac{EI}{\ell^2} \left(6 \cdot \frac{P\ell^2}{32 EI} \right) + \frac{P}{2} = -\frac{3P}{16} + \frac{P}{2} = -\frac{3P}{16} + \frac{8P}{16} = +\frac{5P}{16}$$

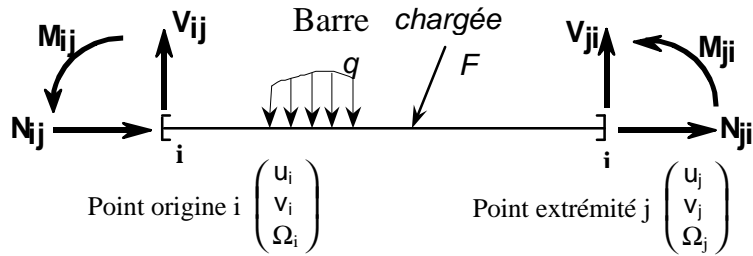
$$V_{AB} = \frac{EI}{\ell^2} \left(6 \cdot \frac{P\ell^2}{32 EI} \right) + \frac{P}{2} = \frac{3P}{16} + \frac{P}{2} = \frac{3P}{16} + \frac{8P}{16} = +\frac{11P}{16}$$

$$M_{AB} = \frac{EI}{\ell} \left(2 \cdot \frac{P\ell^2}{32 EI} \right) + P\frac{\ell}{8} = P\frac{\ell}{16} + P\frac{\ell}{8} = +\frac{3P\ell}{16}$$

D'où les diagrammes de V et M_f :



Méthode des déplacements



Relations Efforts-Déplacements: $[F] = [K] \cdot [D] + [F^0]$

$[K]$: matrice de rigidité de la barre (indépendante du chargement).

$$\begin{bmatrix} N_{ij} \\ V_{ij} \\ M_{ij} \\ N_{ji} \\ V_{ji} \\ M_{ji} \end{bmatrix} = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} \frac{A}{I} & 0 & 0 & -\frac{A}{I} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} & 0 & -\frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} \\ 0 & \frac{6}{l} & 4 & 0 & -\frac{6}{l} & 2 \\ -\frac{A}{I} & 0 & 0 & \frac{A}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} & 0 & \frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} \\ 0 & \frac{6}{l} & 2 & 0 & -\frac{6}{l} & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \Omega_i \\ u_j \\ v_j \\ \Omega_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_{ij}^0 \\ V_{ij}^0 \\ M_{ij}^0 \\ N_{ji}^0 \\ V_{ji}^0 \\ M_{ji}^0 \end{bmatrix}$$

Équivalent au système:

$$\begin{aligned} N_{ij} &= -\frac{EA}{l} (u_j - u_i) + N_{ij}^0 \\ V_{ij} &= \frac{EI}{l^2} \left(6\Omega_i + 6\Omega_j - 12 \frac{v_j - v_i}{l} \right) + V_{ij}^0 \\ M_{ij} &= \frac{EI}{l} \left(4\Omega_i + 2\Omega_j - 6 \frac{v_j - v_i}{l} \right) + M_{ij}^0 \\ N_{ji} &= \frac{EA}{l} (u_j - u_i) + N_{ji}^0 \\ V_{ji} &= -\frac{EI}{l^2} \left(6\Omega_i + 6\Omega_j - 12 \frac{v_j - v_i}{l} \right) + V_{ji}^0 \\ M_{ji} &= \frac{EI}{l} \left(2\Omega_i + 4\Omega_j - 6 \frac{v_j - v_i}{l} \right) + M_{ji}^0 \end{aligned}$$

Formulaire barre bi-encastée pour le calcul des F^0 :

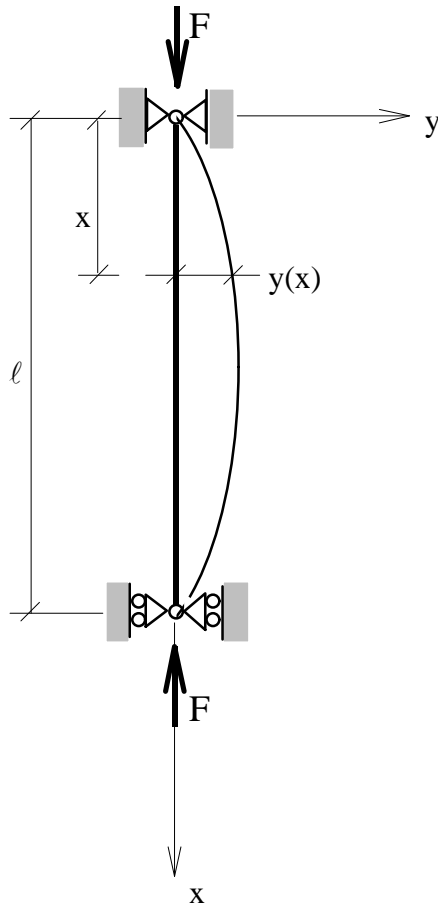
	$+ \frac{q\ell^2}{12} \left(\frac{q\ell}{2} \quad \frac{q\ell}{2} \right) - \frac{q\ell^2}{12}$
	$+ \frac{qa^2}{12\ell^2} (6\ell^2 - 8a\ell + 3a^2) \quad - \frac{qa^3}{12\ell^2} (4\ell - 3a)$ $\left(\frac{qa^3}{\ell^2} \left(1 - \frac{a}{2\ell} \right) \quad qa \left(1 - \frac{a^2}{\ell^2} + \frac{a^3}{2\ell^3} \right) \right)$
	$+ \frac{P\ell}{8} \left(\frac{P}{2} \quad \frac{P}{2} \right) - \frac{P\ell}{8}$
	$+ \frac{Pab^2}{\ell^2} \left(\frac{Pb}{\ell} \quad \frac{Pa}{\ell} \right) - \frac{Pab^2}{\ell^2}$
	$+ \frac{Pa(\ell - a)}{\ell} \left(\frac{P}{\ell} \quad \frac{P}{\ell} \right) - \frac{Pa(\ell - a)}{\ell}$
	$+ \frac{Cb}{\ell} \left(2 - \frac{3b}{\ell} \right) \quad + \frac{Ca}{\ell} \left(2 - \frac{3a}{\ell} \right)$ $\left(\frac{6Cab}{\ell^3} \quad - \frac{6Cab}{\ell^3} \right)$

INSTABILITÉS

FLAMBEMENT :

Théorie d'Euler: barre bi-articulée soumise à un effort de compression F

Hypothèses: - configuration déformée.
- petites déformations.



Expression du moment fléchissant : $M_f(x) = -F \cdot y(x)$

Relation déplacement / sollicitation : $y''(x) = \frac{M_f(x)}{EI_z}$

Donc $y''(x) = \frac{-F \cdot y(x)}{EI_z}$ $\hat{U} \quad y''(x) + \frac{F \cdot y(x)}{EI_z} = 0$

On pose $k^2 = \frac{F}{EI_z}$ d'où $y''(x) + k^2 y(x) = 0$

La solution de cette équation différentielle du 2nd ordre est :

$$Y(x) = A \cdot \cos(kx) + B \cdot \sin(kx)$$

Détermination des constantes avec les conditions aux limites :

- Pour $x = 0$ $y(0) = 0$ donc $A = 0$
- Pour $x = \ell$ $y(\ell) = 0$

Donc $A \cdot \cos(k\ell) = 0$ $\hat{U} \quad \begin{cases} B = 0 \text{ (pas de flambement dans ce cas)} \\ \sin(k\ell) = 0 \end{cases} \hat{U} \quad k \cdot \ell = n \cdot \pi$ avec $n = 1, 2, 3 \dots$

$n = 1$ 1^{er} mode de flambement $k = \frac{\pi}{\ell}$ soit $k^2 = \frac{\pi^2}{\ell^2} = \frac{F}{EI_z}$

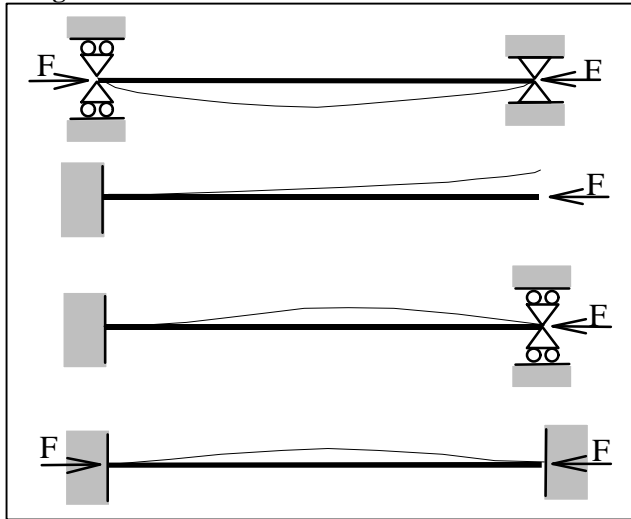
On note F_{cr} la force critique d'Euler :

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_z}{\ell^2}$$

Équation de la déformée : $y(x) = B \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{\ell}\right)$ Demi-onde sinusoidale de flèche maximale (amplitude) B.

Remarque: B n'est pas déterminé par cette méthode @ méthode plus complexe en grands déplacements où $y'' = \frac{M}{EI}$ n'est plus valable.

Longueur de flambement:



$$F_{cr} = \frac{p^2 EI_z}{l^2} \quad l_f = l$$

$$F_{cr} = \frac{p^2 EI_z}{(2l)^2} \quad l_f = 2l$$

$$F_{cr} = \frac{p^2 EI_z}{(l\sqrt{2})^2} \quad l_f = \frac{l}{\sqrt{2}}$$

$$F_{cr} = \frac{p^2 EI_z}{(l/2)^2} \quad l_f = \frac{l}{2}$$

D'où la proposition générale: $F_{cr} = K \frac{p^2 EI}{l^2}$ K : fonction de la nature des liaisons

avec: $l_k = \frac{l}{\sqrt{K}}$ $F_{cr} = \frac{p^2 EI}{l_k^2}$ l_k : longueur de flambement de la poutre.

Contrainte critique d'Euler:

Contrainte notée $s_k = \frac{F_{cr}}{A}$ avec $\begin{cases} F_{cr}: \text{force critique d'Euler} \\ A: \text{surface de la section droite.} \end{cases}$

$$s_k = \frac{p^2 EI}{l_k^2} \times \frac{1}{A} = \frac{p^2 E}{l_k^2 \frac{A}{I}}$$

On appelle i le rayon de giration définie par: $i^2 = \frac{I}{A}$

soit $s_k = \frac{p^2 E}{(l_k/i)^2}$

On définit I l'élancement par: $I = \frac{l_k}{i}$

D'où la contrainte critique d'Euler :

$$s_k = \frac{p^2 E}{I^2}$$

Courbes de flambement:

Courbes européennes de flambement: étude de $\frac{s_k}{s_e}$ en fonction de $\frac{I}{I_r}$

I_r : Élancement eulérien (valeur de I pour $s_k = s_e$)

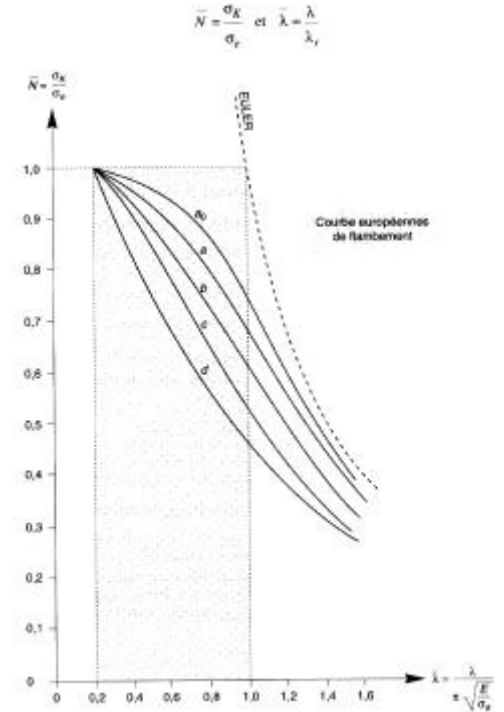
$$I_r = p \sqrt{\frac{E}{s_e}}$$

Dans le cas de l'acier S.235, on a:
 $s_e = 240 \text{ MPa}$ et $E = 210\,000 \text{ MPa}$

d'où $I_r = 93,9$

On définit un élancement réduit \bar{I}

- Avec $\bar{I} = \frac{I}{I_r} = \frac{I}{p} \sqrt{\frac{s_e}{E}}$



Aspect réglementaire:

Compression simple:

Il faut vérifier

$$k_0 \frac{N}{N_p} \leq 1$$

k_0 se détermine à partir des tableaux A, B et C de l'additif 80

N_p est l'effort de plastification de la section: $N_p = A \cdot f_y$ ($f_y = s_e$).

Compression et flexion:

Résistance à vérifier si : $\bar{I} > 0,2$ et $k_0 \frac{N}{N_p} > 1$

Il faut vérifier :

$$k_0 \frac{N}{N_p} + \frac{k_{fy}}{k_D} \frac{M_{my}}{M_{py}} + k_{fz} \frac{M_{mz}}{M_{pz}} \leq 1$$

M_{my}, M_{mz} : Moments de flexion max. par rapport à l'axe de forte inertie et à l'axe de faible inertie.

k_0 : Coefficient calculé en compression simple.

k_D : Coefficient de déversement (chapitre B) calculé en considérant que le moment de flexion est constant.

$$k_{fy} = \frac{C_{my}}{1 - \frac{C_{my}}{I_y} \frac{N}{N_p}} \quad \text{et} \quad k_{fz} = \frac{C_{mz}}{1 - \frac{C_{mz}}{I_z} \frac{N}{N_p}}$$

C_{my}, C_{mz} :

structures à nœuds fixes : $C_m = 1$ (sécurité) ou valeurs tableau VI page 89 additif 80.

structures à nœuds déplaçables : $C_m = 1$ barre fléchie simple courbure, $C_m = 0,85$ autres cas.

Longueur de flambement:

Suivant le type de structures (à nœuds fixes ou à nœuds déplaçables), l'additif 80 donne des relations pour le calcul de L_K la longueur de flambement pour des poteaux se trouvant dans une structure. Cette longueur est fonction des rigidités amenées à chaque extrémité par les poutres et les poteaux.

$$K_A = \frac{\sum_A \left(\frac{I_b}{L_b} \right)}{\sum_A \left(\frac{I_b}{L_b} \right) + \sum_A \left(\frac{I_c}{L_c} \right)} \quad \text{et} \quad K_B = \frac{\sum_B \left(\frac{I_b}{L_b} \right)}{\sum_B \left(\frac{I_b}{L_b} \right) + \sum_B \left(\frac{I_c}{L_c} \right)}$$

b : beam (poutre en anglais) et c : column (poteau en anglais).

Structures nœuds fixes :

$$L_k = \frac{3 - 1,6(K_A + K_B) + 0,84 K_A K_B}{3 - (K_A + K_B) + 0,28 K_A K_B} L$$

La rigidité relative $\frac{I}{L}$ des poutres doit être multipliée par 1,5 si l'extrémité opposée au nœud

considéré est articulée ou plastifiée et par 2 si elle est encastrée parfaitement.

Si articulation ou rotule plastique en A (ou B) on adopte K_A (ou K_B) = 0,05.

Pour un encastrement supposé parfait à un appui, on prend K_A (ou K_B) = 0,95.

Structures à nœuds déplaçables :

$$L_k = \sqrt{\frac{1,6 + 2,4(K_A + K_B) + 1,1 K_A K_B}{K_A + K_B + 5,5 K_A K_B}} L$$

La rigidité relative $\frac{I}{L}$ des poutres doit être multipliée par 0,5 si l'extrémité opposée au nœud

considéré est articulée ou plastifiée et par 0,67 si elle est encastrée.

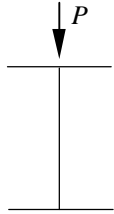
Si articulation ou rotule plastique en A (ou B) on adopte K_A (ou K_B) = 0,05.

Pour un encastrement supposé parfait à un appui, on prend K_A (ou K_B) = 0,95.

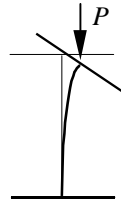
DÉVERSEMENT :

Aspect expérimental:

Soit une poutre mince (fer plat), dont les appuis sont encastrés vis-à-vis de la torsion et quelconques vis-à-vis de la flexion:



Avant l'application de la charge.

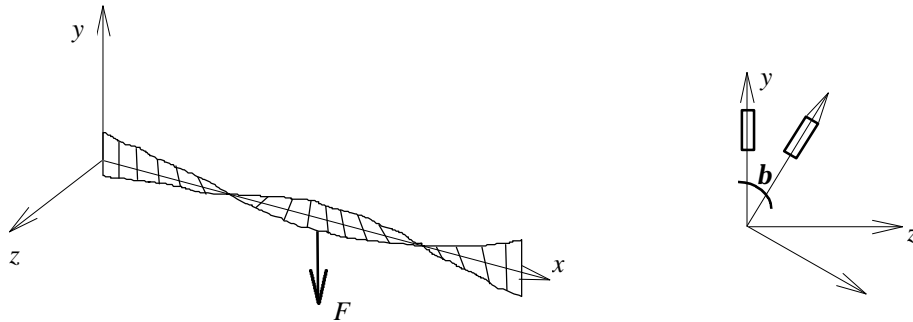


Après application de la charge.

On remarque un effondrement de la poutre pour une contrainte inférieure à la contrainte limite d'élasticité du matériau.

Théorie du déversement:

Pour une poutre rectangulaire avec les mêmes conditions d'appuis que précédemment, représentons la section de celle-ci:



$\left\{ \begin{array}{l} v: \text{déplacement sur } y. \\ w: \text{déplacement sur } z. \\ \mathbf{b}: \text{rotation de la section.} \end{array} \right.$

Les équations déformations-sollicitations s'écrivent:

$$\begin{cases} EI_z \frac{d^2 v}{d x^2} = M_{oz} = M_o & (1) \\ EI_y \frac{d^2 w}{d x^2} = M_{oy} = M_o \cdot \mathbf{b} & (2) \\ GJ_x \frac{d \mathbf{b}}{d x} = M_{ox} = -M_o \frac{d w}{d x} & (3) \end{cases}$$

En différenciant l'équation (3) : $GJ_x \frac{d^2 \mathbf{b}}{d x^2} = -M_o \frac{d^2 w}{d x^2}$ d'où $\frac{d^2 w}{d x^2} = -\frac{GJ_x}{M_o} \frac{d^2 \mathbf{b}}{d x^2}$

En portant dans l'équation (2) : $EI_y \left[-\frac{GJ_x}{M_o} \frac{d^2 \mathbf{b}}{d x^2} \right] = -M_o \cdot \mathbf{b}$

Soit : $\frac{d^2 \mathbf{b}}{d x^2} + \frac{M_o^2}{EI_y \cdot GJ_x} \cdot \mathbf{b} = 0$ qui est l'équation classique du déversement (déversement \cong flambement latéral).

Les solutions de cette équation différentielle sont de la forme :

$$\mathbf{b} = A \cdot \cos(Kx) + B \cdot \sin(Kx)$$

Les conditions aux limites :

- Pour $x=0$, $\mathbf{b} = 0$ donc $A = 0$
- Pour $x = \ell$, $\mathbf{b} = 0$ donc $B \cdot \sin(K\ell) = 0$

Si $B = 0$, $\mathbf{b} = 0$ quel que soit x et il n'y a pas risque de déversement.

$$\text{Si } B \neq 0, \sin(K\ell) = 0 \quad \text{soit } K\ell = p \quad K = \frac{p}{\ell} = \frac{M_o}{\sqrt{EI_y \cdot GJ_x}}$$

D'où l'expression du moment critique de déversement :

$$M_o = \frac{p}{\ell} \cdot \sqrt{EI_y \cdot GJ_x}$$

Pour une section I, les calculs sont plus complexes pour déterminer le moment critique de déversement correspondant. En pratique, on utilise des méthodes de calcul plus simples données par l'additif 80.

Aspect réglementaire:

On doit vérifier que le moment de flexion maximal pondéré M_f est inférieur au moment ultime de déversement:

$$M_f \leq k_D \cdot M_p$$

avec M_p le moment de plastification de la section.

$$k_D: \text{coefficient de déversement} : k_D = \frac{1}{\sqrt[n]{I + \left(\frac{M_p}{M_D}\right)^n}} \quad n = 2 \text{ pour les profilés laminés.}$$

reconstitués.

$$n = 1 \text{ pour les profilés}$$

$$\text{et : } M_D = C_1 \frac{p^2 E I_z h^*}{2 \ell_D^2} \left[\sqrt{x + (h C_2)^2 + \frac{JG}{E I_z} \left(\frac{2 \ell_D}{p h^*}\right)^2} + h C_2 \right]$$

$x = 1$ pour les sections en I.

h^* = distance entre les centres de gravité des semelles.

C_1 et C_2 = coefficients dépendant des conditions d'appuis et du mode de chargement.

ℓ_D = longueur de déversement, généralement égale à la longueur de flambement, dans le plan perpendiculaire au plan de flexion de la membrure comprimée de la poutre.

h = rapport de distance entre le centre de gravité de la section et le point d'application de la charge, à la mi-hauteur du profilé ($-1 < h < +1$).

$h < 0$ si la charge est dirigée vers le centre de gravité de la section à partir de son point d'application.

$h > 0$ dans le cas contraire.

Pour limiter le risque de déversement, on peut ajouter des éléments pour éviter ce déversement sur la membrure comprimée de la poutre (bracons). Ils doivent résister à des efforts égaux à 2 % de l'effort axial de compression existant dans les semelles comprimées.



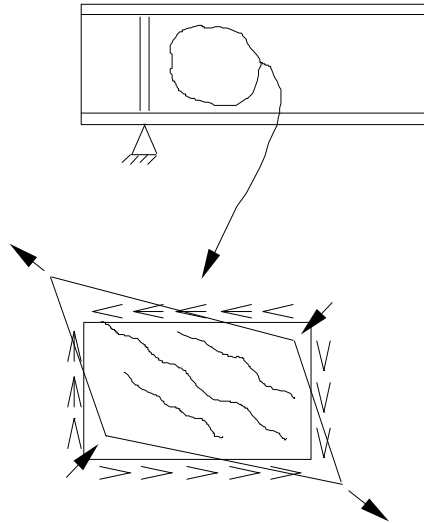
VOILEMENT :

Mise en évidence du voilement :

Cas des poutres soumises à un effort tranchant:

Sous l'effet de l'effort tranchant dans l'âme de la poutre, les éléments de surface de l'âme ont tendance à se plisser sous des efforts de compression et traction conjugués.

D VOILEMENT



Théorie du voilement:

La théorie du voilement s'établit à partir de la "Mécanique des Plaques" (HORS PROGRAMME).

Aspect réglementaire:

• L'additif 80 comporte un article 5,1 page 79 qui indique si les conditions du 5,12 sont vérifiées, la capacité de déformation plastique est jugée suffisante.

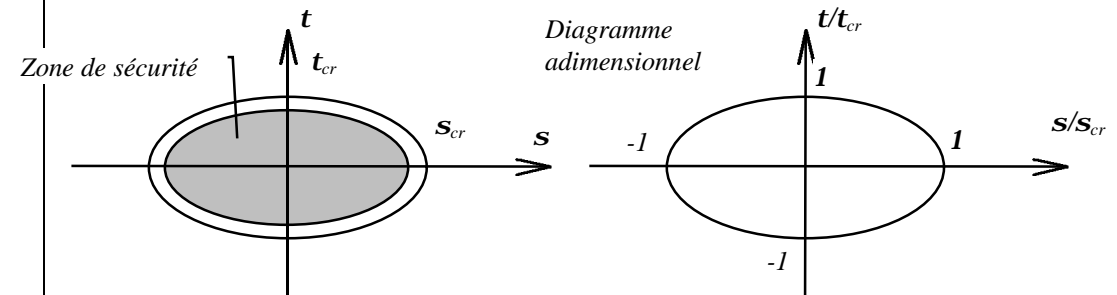
• Dans les autres cas, une méthode pour les constructions "simples" (bâtiment) est donnée dans le CM 66 articles 3,44 et 5,212.

Principe de la méthode:

On suppose un critère introduisant une interaction entre les contraintes normales s et les contraintes tangentielles t avec des valeurs extrêmes qui sont notées s_{cr} et t_{cr} à ne pas dépasser.

Le moment fléchissant introduit des contraintes normales s et l'effort tranchant des contraintes tangentielles t dans le matériau:

$$\text{Critère : } \left(\frac{s}{s_{cr}}\right)^2 + \left(\frac{t}{t_{cr}}\right)^2 \leq 1$$



$$\text{Poutres sans raidisseurs : } \left(\frac{s}{7}\right)^2 + t^2 \leq 0,015 \cdot \left(\frac{1\,000 \cdot e_a}{h_a}\right)^4 \text{ en daN/mm}^2$$

$$\text{Poutres avec raidisseurs : } \left(\frac{s}{7}\right)^2 + \left(\frac{t}{1 + 3 \cdot \frac{h_a^2}{4a^2}}\right)^2 \leq 0,015 \cdot \left(\frac{1\,000 \cdot e_a}{h_a}\right)^4 \text{ en daN/mm}^2$$

$$\text{Dimensionnement du raidisseur sous l'action de compression : } N_{calcul} = V \cdot t_{lim} \cdot e_a \cdot h_a$$

ÉLÉMENTS POUR LES VÉRIFICATIONS

Combinaisons de charges :

Pondérations CM 66 – NV 65/67 (avec carte neige N84) :

1	$\frac{3}{2} Q + \frac{4}{3} (G + T)$
2	$\frac{3}{2} S_n + \frac{4}{3} (G + T)$
3	$\frac{3}{2} W_n + \frac{4}{3} (G + T)$
4	$\frac{17}{12} (Q + S_n) + \frac{4}{3} (G + T)$
5	$\frac{17}{12} (Q + W_n) + \frac{4}{3} (G + T)$
6	$\frac{17}{12} (S_{rn} + W_n) + \frac{4}{3} (G + T)$
7	$\frac{4}{3} (Q + S_{rn} + W_n + G + T)$
8	$Q + S_{rn} + W_e + G + T$
9	$Q + S_{re} + W_n + G + T$
10	$Q + S_e + G + T$

→ Si S_e est inférieure à la charge accidentelle S_a alors on prendra cette dernière à la place de S_e (c'est le cas des faibles altitudes).

Pondérations É.L.U. CM 66 + Additif 80 – NV 65/67 partie vent – N 84 :

	Altitude ≤ 500 m	Altitude > 500 m
1	$\frac{3}{2} Q + \frac{4}{3} (G + T)$	$\frac{3}{2} Q + \frac{4}{3} (G + T)$
2	$\frac{3}{2} S_I + \frac{4}{3} (G + T)$ $\frac{3}{2} S_{II} + \frac{4}{3} (G + T)$	$\frac{3}{2} S_I + \frac{4}{3} (G + T)$ $\frac{3}{2} S_{II} + \frac{4}{3} (G + T)$
3	$\frac{3}{2} W_n + \frac{4}{3} (G + T)$	$\frac{3}{2} W_n + \frac{4}{3} (G + T)$
4	$\frac{17}{12} (Q + S_I) + \frac{4}{3} (G + T)$ $\frac{17}{12} (Q + S_{II}) + \frac{4}{3} (G + T)$	$\frac{17}{12} (Q + S_I) + \frac{4}{3} (G + T)$ $\frac{17}{12} (Q + S_{II}) + \frac{4}{3} (G + T)$
5	$\frac{17}{12} (Q + W_n) + \frac{4}{3} (G + T)$	$\frac{17}{12} (Q + W_n) + \frac{4}{3} (G + T)$
6	– – $\frac{17}{12} (S_{III} + W_n) + \frac{4}{3} (G + T)$	$\frac{17}{12} (\frac{1}{2} S_I + W_n) + \frac{4}{3} (G + T)$ $\frac{17}{12} (\frac{1}{2} S_{II} + W_n) + \frac{4}{3} (G + T)$ $\frac{17}{12} (S_{III} + W_n) + \frac{4}{3} (G + T)$
7	– – $\frac{4}{3} (Q + S_{III} + W_n + G + T)$	$\frac{4}{3} (Q + \frac{1}{2} S_I + W_n + G + T)$ $\frac{4}{3} (Q + \frac{1}{2} S_{II} + W_n + G + T)$ $\frac{4}{3} (Q + S_{III} + W_n + G + T)$
8	– – $Q + S_{III} + W_e + G + T$ $Q + S_a + G + T$	$Q + \frac{1}{2} S_I + W_e + G + T$ $Q + \frac{1}{2} S_{II} + W_e + G + T$ $Q + S_{III} + W_e + G + T$ $Q + S_a + G + T$

Valeurs limites des déformations :

Si les valeurs ne sont pas fixées au niveau du descriptif (cahier des charges), l'Eurocode 3 recommande les valeurs limites suivantes :

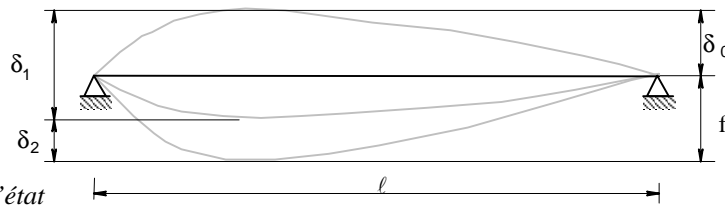
Verticalement :

- toitures en général : $f < \frac{\ell}{200}$ avec $d_2 < \frac{\ell}{250}$
- planchers en général : $f < \frac{\ell}{250}$ avec $d_2 < \frac{\ell}{300}$
- planchers supportant des poteaux : $f < \frac{\ell}{400}$ avec $d_2 < \frac{\ell}{500}$

Horizontalement :

- poteaux de portiques en général : $D < \frac{h}{300}$
- poteaux de portiques avec pont roulant : $D < \frac{h}{500}$

Avec $f = d_1 + d_2 - d_0$



f = flèche dans l'état

final, par rapport à la droite reliant les appuis.

d_0 = contre-flèche de la poutre non chargée.

d_1 = variation de la flèche de la poutre due aux charges permanentes immédiatement après la mise en charge.

d_2 = variation de la flèche de la poutre due aux charges variables augmentée de toute déformation dans le temps due aux charges permanentes.

Effets dynamiques :

Les effets dynamiques à prendre en compte à l'É.L.S. doivent vérifier que les fréquences d'oscillations propres des structures f en Hertz [Hz] = [s⁻¹] (inverse de la période d'oscillation) sont suffisamment différentes de celles de la source d'excitation afin de se prémunir de tout phénomène de mise en résonance.

Vérifications à mener sur f :

- pour les planchers courants de logements, de bureaux... :
 $f > 3$ Hz ce qui est vérifié si la flèche instantanée du plancher reste inférieure à 28 mm.
- pour les planchers moins courants de gymnase, discothèques... :
 $f > 5$ Hz ce qui est vérifié si la flèche instantanée du plancher reste inférieure à 10 mm.

Calcul des fréquences propres :

Les formules sont données dans les règles NV 65/67 annexe 4.

Poteaux à inertie variable :

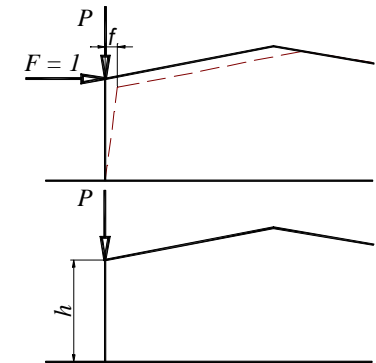
$$T = 2p \sqrt{\frac{P}{g} f}$$

$g = 9,81 \text{ m/s}^2$ et T en secondes

Poteaux à inertie constante :

$$T = 2p \sqrt{\frac{P}{g} \frac{h^3}{3EI}}$$

$g = 9,81 \text{ m/s}^2$ et T en secondes



Organigrammes :

Ces différents organigrammes extraits du livre de Jean Morel « Guide de calcul Structures Métalliques » Éditeur Eyrolles, résumant la vérification des éléments suivant les 3 règlements CM 66, Additif 80 pour les différentes sollicitations :

Effort axial de traction (N).

Effort axial de compression (N).

Moment fléchissant seul (M).

Effort tranchant (V).

Moment fléchissant et effort tranchant ($M + V$).

Moment fléchissant et effort axial ; flexion composée ($M + N$).

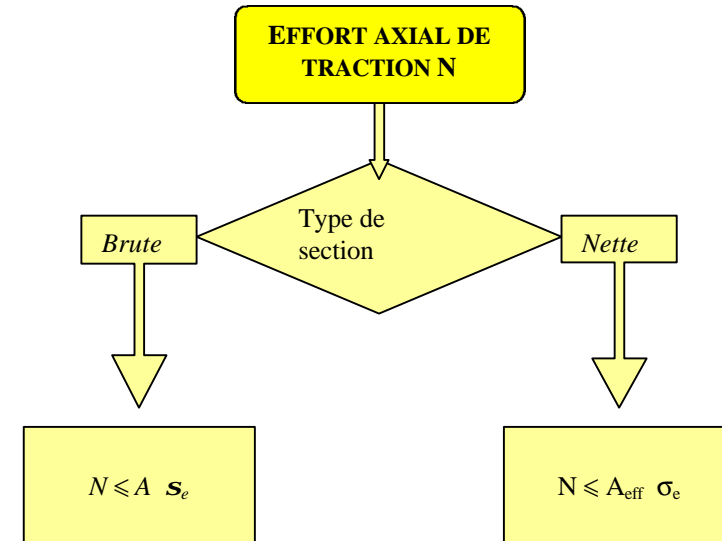
Flexion déviée seule ($N = 0$) ou composée ($N \neq 0$).

Moment de flexion, effort tranchant et effort axial ($M + V + N$).

Dans la plupart des cas, les valeurs sont données pour les profils de type I. Pour les autres profils, on se reportera aux règlements concernés.

EFFORT AXIAL DE TRACTION (N)

➔ Selon les règles CM 66 et selon l'Additif 80



Avec :

$$A_n = e \left[b - n d_{tr} + \sum \left(\frac{\ell_i^2}{4 t_i} \right) \right]_{\min}$$

$A_{\text{eff}} = A$ si les conditions suivantes sont respectées :

- trous poinçonnés : $\frac{A_n}{A} \geq 0,85$
- trous forés ou alésés : $\frac{A_n}{A} \geq 0,75$

$A_{\text{eff}} = A_n$ pour les cas où les conditions précédentes ne sont pas réalisées.

MOMENT FLÉCHISSANT (M)



**Selon les règles
CM 66**

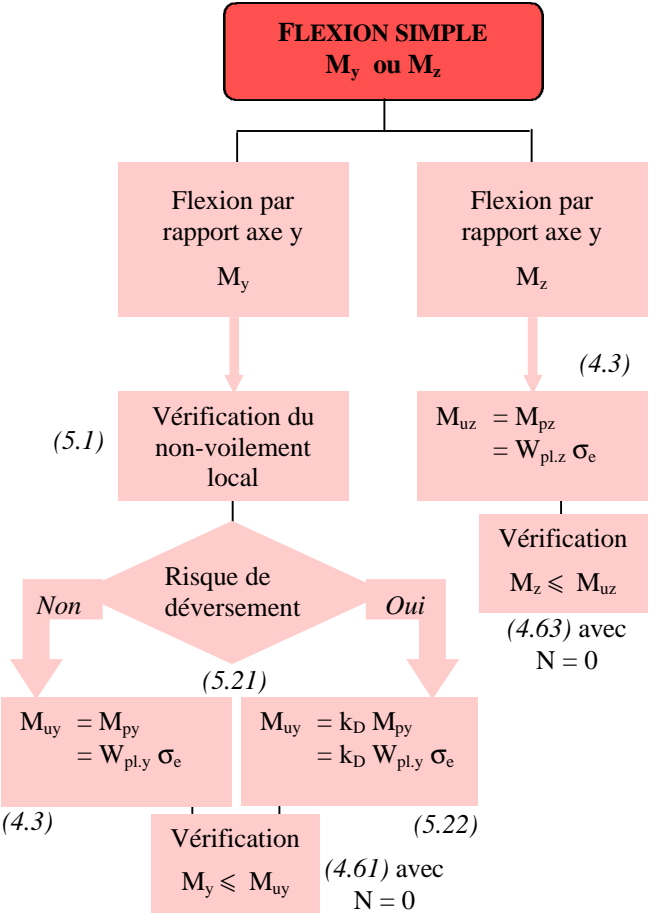
**FLEXION SIMPLE
sans risque de
déversement**

$$\frac{s}{y} \leq s_e$$

Avec :
 ψ = coefficient
 d'adaptation plastique
 $1,05 \leq \psi \leq 1,10$



Selon l'Additif 80



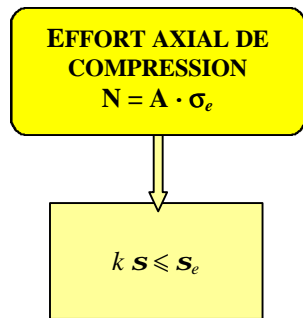
Avec :
 $W_{pl} = Z$ module de flexion plastique
 Convention axes Eurocode (y axe « fort »)



EFFORT AXIAL DE COMPRESSION (N)



Selon les règles CM 66



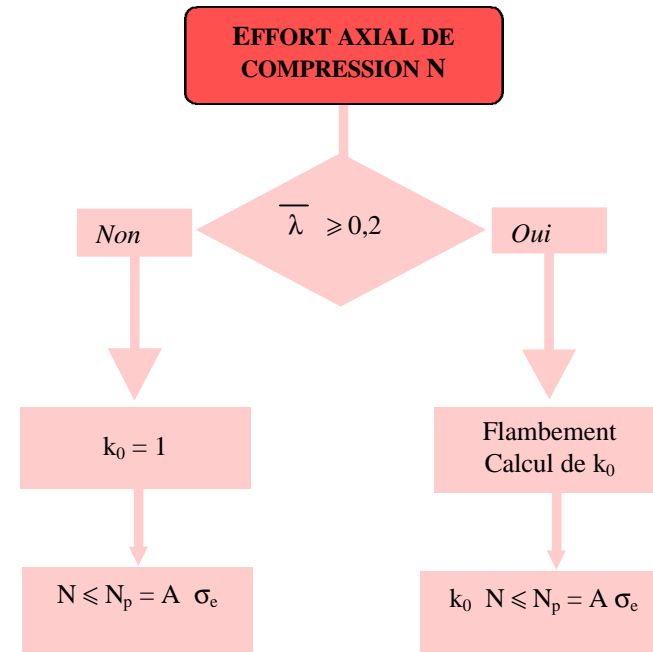
Avec :

$$k = \left(0,5 + 0,65 \frac{\sigma_e}{\sigma_K} \right) + \sqrt{\left(0,5 + 0,65 \frac{\sigma_e}{\sigma_K} \right)^2 - \frac{\sigma_e}{\sigma_K}}$$

$$\sigma_K = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$



Selon l'Additif 80



Avec :

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{\sigma_e}{E}}$$

$$\lambda = \frac{l_K}{i}$$

$k_0 =$ fonction de λ_{\max} (tableaux Additif 80)

EFFORT TRANCHANT (V)

➔ Selon les règles CM 66

EFFORT TRANCHANT V

$$1,54 t \leq s_e$$

La relation peut s'écrire :
 $\tau \leq 0,65 \sigma_e$

➔ Selon l'Additif 80

EFFORT TRANCHANT V

$$V_z \leq V_{pz} = 0,58 A_w \sigma_e$$
$$V_y \leq V_{py} = 0,58 A_f \sigma_e$$

Avec :

$$A_w = A_{vz} \text{ de l'OTUA (} t_w h \text{ sur Add 80)}$$
$$A_f = A_{vy} \text{ de l'OTUA (} 2b t_f \text{ sur Add 80)}$$

L'effort tranchant de plastification a été adopté en utilisant le critère de Von Mises :

$$\sigma^2 + 3 \tau^2 \leq \sigma_e^2$$

MOMENT FLÉCHISSANT et EFFORT TRANCHANT (M + V)



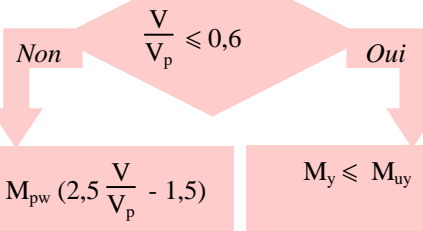
Selon les règles CM 66

sollicitation multiple non prise en compte



Selon l'Additif 80

**FLEXION SIMPLE
+
EFFORT TRANCHANT**



Avec :

M_{pw} = moment de plastification totale de l'âme par flexion :

$$M_{pw} = \frac{t_w h_w^2}{4} \cdot \sigma_e$$

M_{uy} donné en (4.51) $M_{uy} = M_{py}$ lorsque $N = 0$

MOMENT FLÉCHISSANT ET EFFORT AXIAL (M + N) Flexion composée

➔ Selon les règles CM 66

FLEXION

$$s k_l + s_{fy} k_{fy} + s_{fz} k_{fz} \leq s_e$$

(3.721)

Avec :

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

$$\sigma_{fy} = \frac{M_y}{W_{el,y}}$$

$$\sigma_{Ky} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_y^2}$$

$$\mu = \frac{\sigma_K}{\sigma}$$

$$k_1 = \frac{\mu - 1}{\mu - 1,3}$$

$$\sigma_{fz} = \frac{M_z}{W_{el,z}}$$

$$\sigma_{Kz} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_z^2}$$

$$k_f = \frac{\mu - 0,18}{\mu - 1,3}$$

Attention, convention axes Eurocode ;
axe « fort » y

➔ Selon l'Additif 80

FLEXION COMPOSÉE
(M_y, V_z) + N_x

Vérification non-voilement local
(M_p ou ψ.M_e) (5.1)

$$L_{Ky}, L_{Kz}, \lambda_y, \lambda_z, \bar{\lambda}_y, \bar{\lambda}_z, \bar{\lambda}_{max}, (5.31)$$

$$\bar{\lambda} > 0,2 \text{ et } k_0 \frac{N}{N_p} > 0,1$$

(5.32)

Risque de déversement

Non

Oui

(5.21)

Vérification
M_y ≤ M_{uy}

(4.51)

$$k_D = \sqrt[n]{1 + \left(\frac{M_p}{M_D}\right)^n}$$

(5.22)

Vérification
M_y ≤ k_D · M_{py}

(5.22)

Flambement
calcul de k_{fy}

Risque de déversement

Non

Oui

$$\frac{I_y}{I_z} \frac{L_{Kz}}{L_{Ky}} >$$

(5.22)

k_D = 1

$$k_D = \sqrt[n]{1 + \left(\frac{M_p}{M_D}\right)^n}$$

Vérification

$$k_0 \frac{N}{N_p} + \frac{k_{fy}}{k_D} \frac{M_y}{M_{py}} \leq 1$$

(5.32)

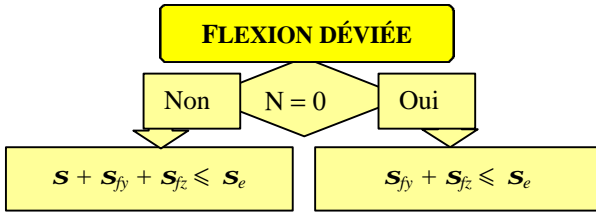
Avec : $c = \min \left[0,25 \text{ et } \frac{A_w}{2A} \right]$

si $\frac{N}{N_p} \leq c$ alors M_{uy} = M_{py} ; si $\frac{N}{N_p} > c$ alors M_{uy} = $\left(\frac{1 - \frac{N}{N_p}}{1 - c} \right) M_{py}$

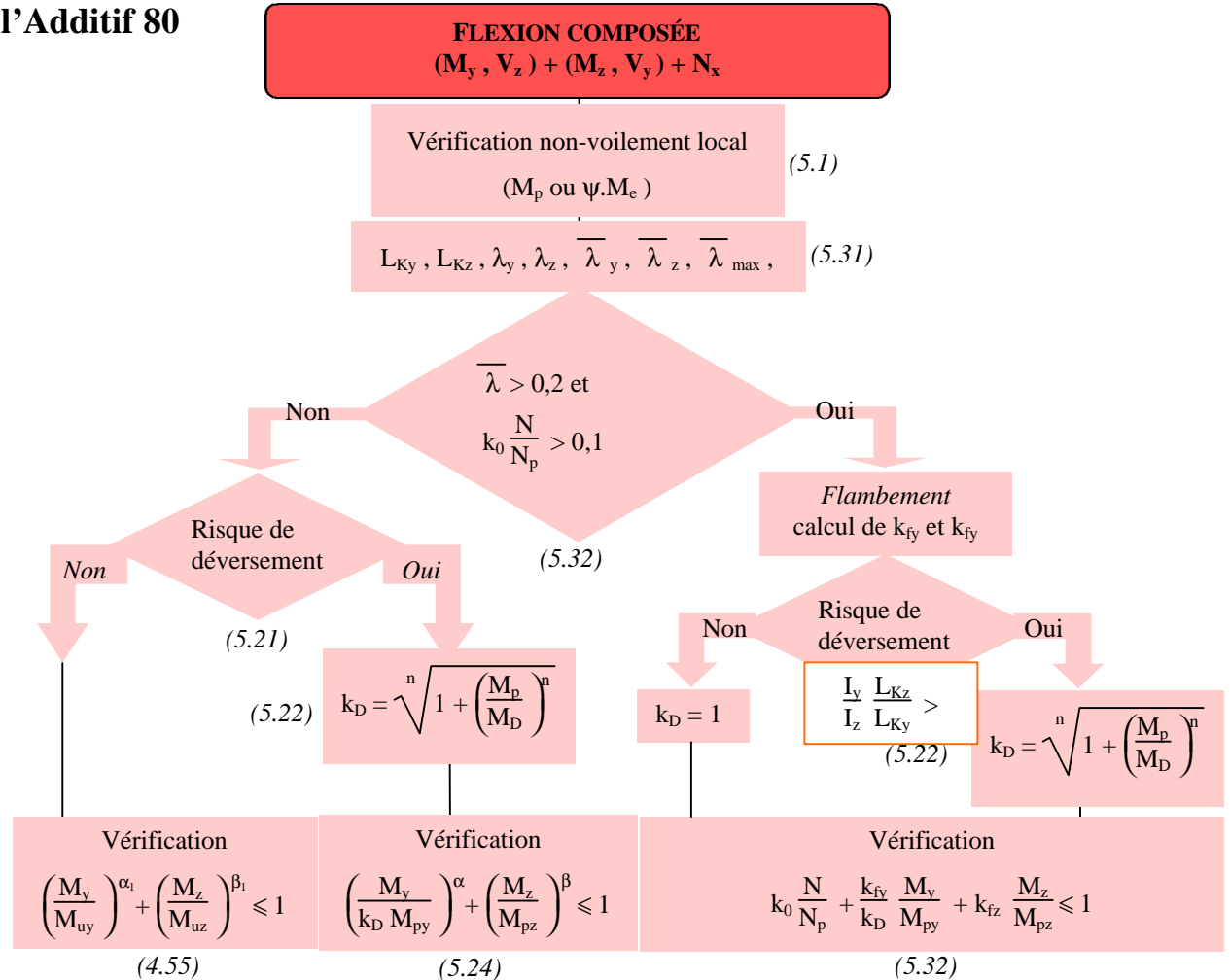
FLEXION DÉVIÉE SEULE (N = 0) ou COMPOSÉE (N ≠ 0)



Selon les règles CM 66



Selon l'Additif 80



Avec (profil I) :

si $\frac{N}{N_p} \leq 0,2$ $a_1 = 1$ et $b_1 = 1$

si $\frac{N}{N_p} > 0,2$ $a_1 = 2$ et $b_1 = 5 \frac{N}{N_p}$

$a = 1,15 + 0,33 (\bar{I} - 1,6)^2$ avec $a \leq 2,1$ et $b = 1$

MOMENT DE FLEXION, EFFORT TRANCHANT et EFFORT AXIAL (M + V + N)



Selon les règles CM 66

sollicitation multiple non prise en compte



Selon l'Additif 80

Il faut vérifier que:

- si $\frac{V}{V_p} + 0,2 \frac{N}{N_p} \leq 0,6$ $M_y \leq M_{uy}$
- si $\frac{V}{V_p} + 0,2 \frac{N}{N_p} > 0,6$ $M_y \leq M_{uy} - M_{pw} \left(2,5 \frac{V}{V_p} + 0,5 \frac{N}{N_p} - 1,5 \right)$
avec $M_{pw} = \frac{t_w h_w^2}{4} \cdot \sigma_e$



Annexe 1: FLAMBEMENT:

Flambement Additif 80:

3 courbes de flambement A, B et C.

Courbe A:

- Profils creux conformes à la norme NF EN 10210 (ex-NF A 49-501).
- Sections en double T et en caisson en acier à limite d'élasticité $\sigma_e \geq 430$ MPa ou ayant subi un traitement thermique de relaxation des contraintes résiduelles.

Courbe B :

- Sections en double T ou en caisson pour lesquelles les tableaux A et C ne s'appliquent pas.
- Sections obtenues par assemblage de cornières ou de profils laminés.

Courbe C :

- Sections en U, en T et les cornières simples.
- Sections en double T et en caisson dont l'épaisseur d'âme ou de semelle dépasse 40 mm.
- Profils creux conformes à la norme NF EN 10219 (ex-NF A 49-541).

Valeur de k_0 :

Si $\bar{\lambda} \leq 0,2$ $k_0 = 1$

Si $\bar{\lambda} > 0,2$ $k_0 = \frac{2 \bar{\lambda}^2}{1 + \alpha (\bar{\lambda} - 0,2) + \bar{\lambda}^2 - \sqrt{[1 + \alpha (\bar{\lambda} - 0,2) + \bar{\lambda}^2]^2 - 4 \bar{\lambda}^2}}$

avec :

- $\alpha = 0,206$ pour le tableau A
- $\alpha = 0,339$ pour le tableau B
- $\alpha = 0,489$ pour le tableau C

(valeurs admises qui diffèrent très peu de l'additif 80)

Tableau A (colonne + ligne)

λ	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
0.1	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
0.2	1.00	1.00	1.00	1.01	1.01	1.01	1.01	1.02	1.02	1.02
0.3	1.02	1.03	1.03	1.03	1.03	1.04	1.04	1.04	1.04	1.05
0.4	1.05	1.05	1.05	1.06	1.06	1.06	1.07	1.07	1.07	1.08
0.5	1.08	1.08	1.09	1.09	1.10	1.10	1.10	1.11	1.11	1.12
0.6	1.12	1.13	1.13	1.14	1.14	1.15	1.15	1.16	1.16	1.17
0.7	1.18	1.18	1.19	1.20	1.20	1.21	1.22	1.23	1.24	1.24
0.8	1.25	1.26	1.27	1.28	1.29	1.30	1.31	1.32	1.33	1.35
0.9	1.36	1.37	1.38	1.40	1.41	1.42	1.44	1.45	1.47	1.48
1.0	1.50	1.51	1.53	1.55	1.56	1.58	1.60	1.62	1.63	1.65
1.1	1.67	1.69	1.71	1.73	1.75	1.77	1.79	1.81	1.84	1.86
1.2	1.88	1.90	1.93	1.95	1.97	2.00	2.02	2.04	2.07	2.09
1.3	2.12	2.14	2.17	2.20	2.22	2.25	2.28	2.30	2.33	2.36
1.4	2.39	2.41	2.44	2.47	2.50	2.53	2.56	2.59	2.62	2.65
1.5	2.68	2.71	2.74	2.77	2.80	2.83	2.86	2.90	2.93	2.96
1.6	2.99	3.03	3.06	3.09	3.13	3.16	3.19	3.23	3.26	3.30
1.7	3.33	3.37	3.40	3.44	3.47	3.51	3.55	3.58	3.62	3.66
1.8	3.69	3.73	3.77	3.80	3.84	3.88	3.92	3.96	4.00	4.03
1.9	4.07	4.11	4.15	4.19	4.23	4.27	4.31	4.35	4.40	4.44
2.0	4.48	4.52	4.56	4.60	4.64	4.69	4.73	4.77	4.82	4.86
2.1	4.90	4.95	4.99	5.03	5.08	5.12	5.17	5.21	5.26	5.30
2.2	5.35	5.39	5.44	5.48	5.53	5.58	5.62	5.67	5.72	5.76
2.3	5.81	5.86	5.91	5.96	6.00	6.05	6.10	6.15	6.20	6.25
2.4	6.30	6.35	6.40	6.45	6.50	6.55	6.60	6.65	6.70	6.75
2.5	6.81	6.86	6.91	6.96	7.01	7.07	7.12	7.17	7.23	7.28

Tableau B (colonne + ligne)

λ	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
0.1	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
0.2	1.00	1.00	1.01	1.01	1.01	1.02	1.02	1.03	1.03	1.03
0.3	1.04	1.04	1.05	1.05	1.05	1.06	1.06	1.07	1.07	1.08
0.4	1.08	1.08	1.09	1.09	1.10	1.10	1.11	1.11	1.12	1.12
0.5	1.13	1.14	1.14	1.15	1.15	1.16	1.17	1.17	1.18	1.19
0.6	1.19	1.20	1.21	1.22	1.22	1.23	1.24	1.25	1.26	1.27
0.7	1.28	1.28	1.29	1.30	1.31	1.32	1.33	1.35	1.36	1.37
0.8	1.38	1.39	1.40	1.42	1.43	1.44	1.46	1.47	1.48	1.50
0.9	1.51	1.53	1.54	1.56	1.57	1.59	1.61	1.62	1.64	1.66
1.0	1.67	1.69	1.71	1.73	1.75	1.77	1.79	1.81	1.83	1.85
1.1	1.87	1.89	1.91	1.93	1.95	1.97	2.00	2.02	2.04	2.07
1.2	2.09	2.11	2.14	2.16	2.19	2.21	2.24	2.26	2.29	2.31
1.3	2.34	2.37	2.39	2.42	2.45	2.48	2.50	2.53	2.56	2.59
1.4	2.62	2.65	2.68	2.71	2.74	2.77	2.80	2.83	2.86	2.89
1.5	2.92	2.95	2.98	3.02	3.05	3.08	3.11	3.15	3.18	3.21
1.6	3.25	3.28	3.31	3.35	3.38	3.42	3.45	3.49	3.52	3.56
1.7	3.59	3.63	3.67	3.70	3.74	3.78	3.81	3.85	3.89	3.93
1.8	3.97	4.00	4.04	4.08	4.12	4.16	4.20	4.24	4.28	4.32
1.9	4.36	4.40	4.44	4.48	4.52	4.56	4.60	4.65	4.69	4.73
2.0	4.77	4.81	4.86	4.90	4.94	4.99	5.03	5.07	5.12	5.16
2.1	5.21	5.25	5.30	5.34	5.39	5.43	5.48	5.52	5.57	5.62
2.2	5.66	5.71	5.76	5.80	5.85	5.90	5.95	6.00	6.04	6.09
2.3	6.14	6.19	6.24	6.29	6.34	6.39	6.44	6.49	6.54	6.59
2.4	6.64	6.69	6.74	6.79	6.84	6.89	6.95	7.00	7.05	7.10
2.5	7.16	7.21	7.26	7.32	7.37	7.42	7.48	7.53	7.59	7.64



Tableau C (colonne + ligne)

λ	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
0.1	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
0.2	1.00	1.01	1.01	1.02	1.02	1.03	1.03	1.04	1.04	1.05
0.3	1.05	1.06	1.06	1.07	1.08	1.08	1.09	1.10	1.10	1.11
0.4	1.11	1.12	1.13	1.13	1.14	1.15	1.16	1.16	1.17	1.18
0.5	1.19	1.19	1.20	1.21	1.22	1.23	1.24	1.24	1.25	1.26
0.6	1.27	1.28	1.29	1.30	1.31	1.32	1.33	1.34	1.36	1.37
0.7	1.38	1.39	1.40	1.42	1.43	1.44	1.45	1.47	1.48	1.50
0.8	1.51	1.52	1.54	1.55	1.57	1.58	1.60	1.62	1.63	1.65
0.9	1.67	1.68	1.70	1.72	1.74	1.76	1.77	1.79	1.81	1.83
1.0	1.85	1.87	1.89	1.91	1.93	1.95	1.98	2.00	2.02	2.04
1.1	2.06	2.09	2.11	2.13	2.16	2.18	2.20	2.23	2.25	2.28
1.2	2.30	2.33	2.36	2.38	2.41	2.43	2.46	2.49	2.52	2.54
1.3	2.57	2.60	2.63	2.66	2.68	2.71	2.74	2.77	2.80	2.83
1.4	2.86	2.89	2.92	2.95	2.99	3.02	3.05	3.08	3.11	3.14
1.5	3.18	3.21	3.24	3.28	3.31	3.34	3.38	3.41	3.45	3.48
1.6	3.52	3.55	3.59	3.62	3.66	3.69	3.73	3.77	3.80	3.84
1.7	3.88	3.92	3.95	3.99	4.03	4.07	4.11	4.14	4.18	4.22
1.8	4.26	4.30	4.34	4.38	4.42	4.46	4.50	4.54	4.59	4.63
1.9	4.67	4.71	4.75	4.79	4.84	4.88	4.92	4.96	5.01	5.05
2.0	5.10	5.14	5.18	5.23	5.27	5.32	5.36	5.41	5.45	5.50
2.1	5.54	5.59	5.64	5.68	5.73	5.78	5.82	5.87	5.92	5.97
2.2	6.01	6.06	6.11	6.16	6.21	6.26	6.30	6.35	6.40	6.45
2.3	6.50	6.55	6.60	6.65	6.71	6.76	6.81	6.86	6.91	6.96
2.4	7.01	7.07	7.12	7.17	7.22	7.28	7.33	7.38	7.44	7.49
2.5	7.55	7.60	7.66	7.71	7.77	7.82	7.88	7.93	7.99	8.04

Annexe 2: DÉVERSEMENT:

Déversement Additif 80:

Coefficient de déversement : $k_D = \sqrt[n]{1 + \left(\frac{M_p}{M_D}\right)^n}$

avec $n = 2$ pour les profilés laminés

$n = 1,5$ pour les profilés reconstitués

$$M_D = C_1 \frac{\pi^2 E I_z h^*}{2 L_D^2} \left\{ \sqrt{\xi + (\eta C_2)^2 + \frac{J G}{E I_z} \left(\frac{2 L_D}{\pi h^*}\right)^2} + \eta C_2 \right\}$$

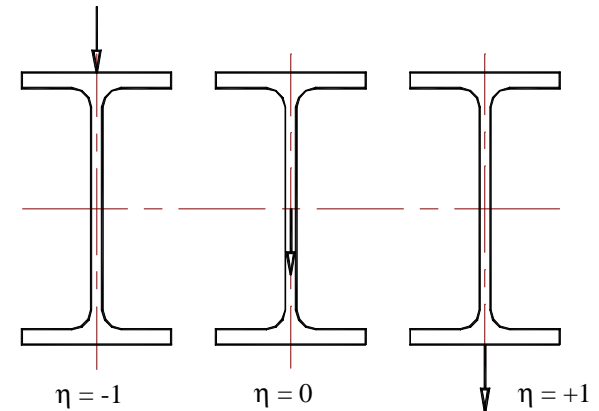
avec $\xi = 1$ pour les sections en double T

$\xi = 0$ pour les sections en caisson

$h^* = h - t_f$

I_z = moment d'inertie de flexion axe « faible »

$\eta = \frac{\text{distance entre centre gravité de la section et pt. d'appli. charge}}{\text{demi-hauteur du profilé}}$



L = distance entre les entretoises qui définissent le tronçon étudié.
 L_D = longueur de déversement généralement égale à la longueur de flambement dans le plan perpendiculaire au plan de flexion de la membrure comprimée de la poutre .

$L_D = L$ lorsqu'il n'y a aucun encastrement par rapport à l'axe zz aux extrémités de tronçon non contreventé.

$L_D = 0,5 L$ lorsqu'il y a encastrement parfait.

On est du côté de la sécurité si on prend $L_D = L$

C_1 et C_2 : coefficients qui dépendent des conditions d'appuis et du chargement sur la barre. Pour les cas de charges courants, ces coefficients sont donnés dans le tableau 5 de l'additif 80.

ces semelles au niveau des sections entretoisées et transmis par ces semelles perpendiculairement au plan de l'âme des poutres

TABLEAU V

Chargement	$\frac{L_D}{L}$	c_1	c_2
	1	1,13	0,46
	0,5	0,97	0,30
	1	1,28	1,56
	0,5	0,71	0,65
	1	1,36	0,55
	0,5	1,07	0,43
	1	1,56	1,27
	0,5	0,94	0,71
	1	$1 + 2,92 \alpha^3$	$\alpha [2,44 - 3,24 \alpha] c_1$
	0,5	$1 + (1,06 - \alpha) \alpha^3$	$2 \alpha^2 (1,3 - \alpha) c_1$
	1	$1 + \alpha [1,68 - 2,24 \alpha^2]$	$\alpha (3,44 - 3,62 \alpha) c_1$
	0,5	$1 - 0,48 \alpha^3$	$14,4 \alpha^2 (0,71 - \alpha) c_1$
	1	$1,36 + 2(\alpha - 0,5)^2$	$\alpha (1,72 - 1,81 \alpha) c_1$
	0,5	$1,07 + 2,56(\alpha - 0,5)^2$	$\alpha (1,76 - 1,9 \alpha) c_1$
	1	$\frac{1}{\sqrt{0,283(1 + \beta^2) + 0,434\beta}}$	0
	0,5	$\frac{1}{\sqrt{0,34 + 0,4\beta + 0,26\beta^2}}$	0
	2	2,56	0,43
	2	4,10	0,83

Les éléments de structures assurant le maintien latéral de semelles comprimées de poutre doivent pouvoir résister à un effort égal à 2 % de la force de compression existant dans